

## 1.1 Fungsi

Dalam kehidupan seharian, terdapat banyak kuantiti yang bergantung kepada satu atau lebih pemboleh ubah. Teliti dan fahami situasi yang berikut:

Anda bekerja sebagai juruwang sambilan dan anda dibayar RM80 sehari. Jumlah upah yang diperolehi ditentukan oleh bilangan hari anda bekerja.



Anda membeli durian di sebuah gerai. Jika harga sekilogram durian ialah RM8, jumlah wang yang perlu anda bayar bergantung kepada jisim durian yang anda beli.



Dalam matematik, situasi seperti ini ialah contoh-contoh bagi suatu fungsi. Daripada contoh situasi ini, dapatkah anda nyatakan maksud fungsi?

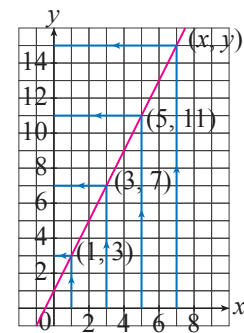
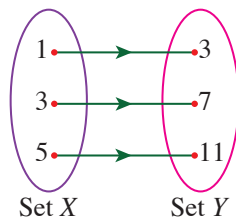


### Menerangkan fungsi menggunakan perwakilan grafik dan tatatanda

Perhatikan graf  $y = 2x + 1$  di sebelah. Hubungan antara nilai 1 pada paksi- $x$  dan nilai 3 pada paksi- $y$  boleh ditulis sebagai  $1 \rightarrow 3$ . Ini menunjukkan bahawa 1 ialah unsur pertama dan 3 ialah unsur terakhir.

Dalam hal ini, kita boleh katakan bahawa 1 dipetakan kepada 3. Begitu juga dengan  $3 \rightarrow 7$ ,  $5 \rightarrow 11$  dan seterusnya. Setiap titik  $(x, y)$  pada garis adalah berpadanan dengan pemetaan  $x \rightarrow y$  yang memetakan nilai  $x$  pada paksi- $x$  kepada nilai  $y$  pada paksi- $y$ .

Hubungan antara sebahagian daripada pemetaan  $x \rightarrow y$  boleh diwakili oleh gambar rajah anak panah seperti di bawah.



Setiap unsur  $x$  dalam set  $X$  dipetakan kepada hanya satu unsur  $y$  dalam set  $Y$ .

Maka, hubungan seperti ini dikenali sebagai **fungsi** atau **pemetaan**.

Secara amnya:

Fungsi dari set  $X$  kepada set  $Y$  ialah hubungan khas yang memetakan setiap unsur  $x \in X$  kepada hanya satu unsur  $y \in Y$ .

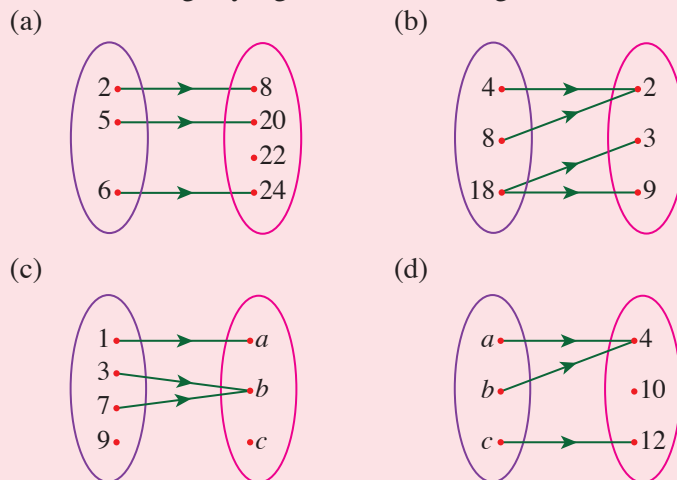


Jika  $f$  menandakan fungsi dari set  $X = \{1, 3, 5\}$  kepada set  $Y = \{3, 7, 11\}$  yang ditakrifkan oleh  $f: 1 \rightarrow 3, f: 3 \rightarrow 7$  dan  $f: 5 \rightarrow 11$ , unsur 1 dikenali sebagai objek dan unsur 3 ialah imejnya. Begitu juga 7 dan 11 masing-masing ialah imej bagi 3 dan 5. Mana-mana unsur  $x$  dalam set  $X$  yang dipetakan kepada satu unsur  $y$  dalam set  $Y$  oleh  $y = 2x + 1$  ditulis dengan tatatanda seperti berikut:

$$\begin{aligned} f: x &\rightarrow y & \text{atau} & \quad f(x) = y \\ f: x &\rightarrow 2x + 1 & \text{atau} & \quad f(x) = 2x + 1 \\ & \text{dengan } x \text{ ialah objek dan } 2x + 1 \text{ ialah imej} \end{aligned}$$

### Contoh 1

Adakah hubungan yang berikut suatu fungsi? Jelaskan.

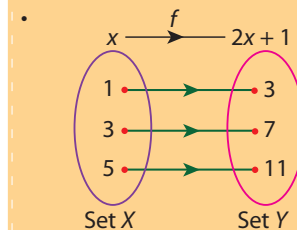


### Penyelesaian

- (a) Hubungan ini ialah fungsi kerana setiap objek mempunyai satu imej sahaja walaupun unsur 22 tidak mempunyai objek.
- (b) Hubungan ini bukan fungsi kerana tidak memenuhi syarat fungsi, iaitu setiap objek hanya mempunyai satu imej sahaja. Perhatikan 18 mempunyai dua imej, iaitu  $18 \rightarrow 3$  dan  $18 \rightarrow 9$ .
- (c) Hubungan ini bukan fungsi kerana tidak memenuhi syarat fungsi, iaitu setiap objek mesti mempunyai satu imej sahaja. Perhatikan 9 tidak mempunyai imej.
- (d) Hubungan ini ialah fungsi kerana setiap objek mempunyai satu imej sahaja walaupun unsur 10 tidak mempunyai objek.



- $f: x \rightarrow 2x + 1$  dibaca sebagai "fungsi  $f$  memetakan  $x$  kepada  $2x + 1$ ".
- $f(x) = 2x + 1$  dibaca sebagai " $2x + 1$  ialah imej bagi  $x$  di bawah fungsi  $f$ " atau "fungsi  $f$  bagi  $x$  ialah sama dengan  $2x + 1$ ".

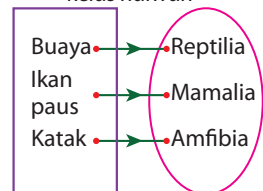


dibaca sebagai  
" $2x + 1$  bagi 1 ialah 3" dan seterusnya.

### IMBAS KEMBALI

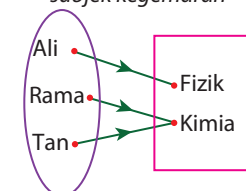
Fungsi ialah hubungan satu dengan satu atau hubungan banyak dengan satu.

kelas haiwan



**Hubungan satu dengan satu**

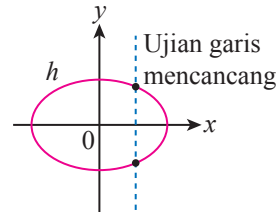
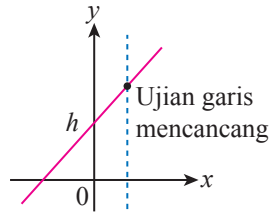
subjek kegemaran



**Hubungan banyak dengan satu**

Bagaimanakah kita dapat menentukan bahawa graf bagi suatu hubungan ialah fungsi? Apabila diberi suatu graf, kita boleh menggunakan **ujian garis mencancang** untuk menentukan sama ada graf tersebut ialah fungsi atau bukan. Jika garis mencancang memotong graf hanya pada satu titik, maka hubungan itu merupakan fungsi. Sebaliknya, jika garis mencancang itu tidak memotong mana-mana titik pada graf atau memotong lebih daripada satu titik, maka graf itu bukan fungsi.

Graf  $h$  ialah fungsi.

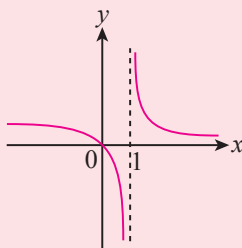


Graf  $h$  bukan fungsi.

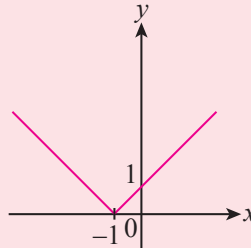
### Contoh 2

Antara graf berikut, yang manakah menunjukkan fungsi?

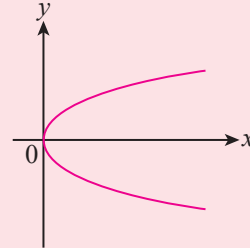
(a)



(b)

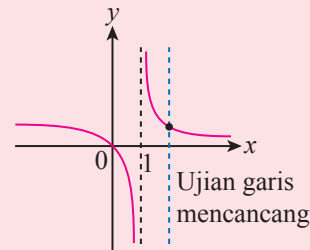


(c)

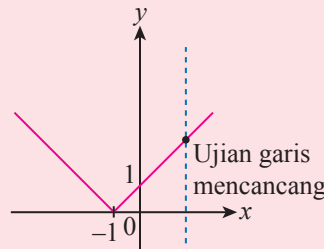


### Penyelesaian

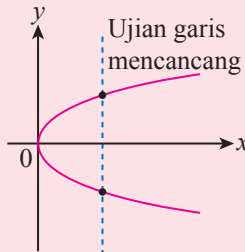
(a) Graf ini ialah suatu fungsi kerana apabila diuji dengan garis mencancang, garis itu memotong graf hanya pada satu titik sahaja kecuali pada  $x = 1$  yang tidak memotong mana-mana titik pada graf.



(b) Graf ini ialah suatu fungsi kerana apabila diuji dengan garis mencancang, garis itu memotong graf hanya pada satu titik sahaja.



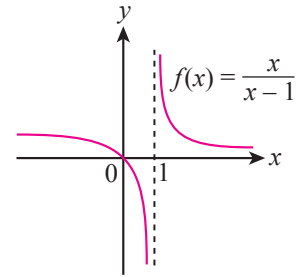
(c) Graf ini bukan suatu fungsi kerana apabila diuji dengan garis mencancang, garis itu memotong dua titik pada graf.



### Cabar Minda

Berapakah bilangan pintasan- $x$  dan pintasan- $y$  yang boleh wujud pada graf suatu fungsi?

Perhatikan semula graf dalam Contoh 2(a). Graf tersebut ialah graf bagi fungsi  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ . Daripada graf dalam Rajah 1.1, kita dapati apabila  $x \rightarrow 1^-$ , iaitu  $x$  menghampiri 1 dari sebelah kiri,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , iaitu nilai  $f(x)$  semakin berkurang tanpa sempadan. Apabila  $x \rightarrow 1^+$ , iaitu  $x$  menghampiri 1 dari sebelah kanan,  $f(x) \rightarrow \infty$ , iaitu nilai  $f(x)$  semakin meningkat tanpa sempadan. Keadaan ini bermaksud, graf hanya menghampiri tetapi tidak menyentuh garis  $x = 1$ . Jadi, fungsi ini ialah fungsi tidak tertakrif pada  $x = 1$ .

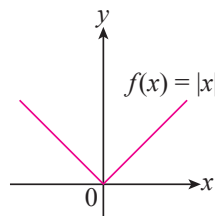


Rajah 1.1

Perhatikan pula graf dalam Contoh 2(b). Graf tersebut ialah graf bagi fungsi nilai mutlak  $f(x) = |x + 1|$ . Ungkapan nilai mutlak  $|x|$  ialah nilai berangka bagi  $x$  dan ditakrifkan oleh:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Jadi, apabila  $x = -2$ ,  $|-2| = -(-2) = 2$   
dan apabila  $x = 2$ ,  $|2| = 2$ .



Rajah 1.2

Fungsi yang ditakrifkan oleh  $f(x) = |x|$  mempunyai graf berbentuk V dengan bucu pada  $(0, 0)$  seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1.2.  $|x|$  dibaca sebagai “modulus bagi  $x$ ”.



Berdasarkan Rajah 1.1:

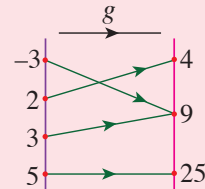
- $x \rightarrow 1^-$  bermaksud  $x$  menghampiri 1 dari sebelah kiri pada graf  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ,  $x < 1$ .
- $x \rightarrow 1^+$  bermaksud  $x$  menghampiri 1 dari sebelah kanan pada graf  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ,  $x > 1$ .

### Contoh 3

Berdasarkan rajah di sebelah, tulis hubungan bagi fungsi  $g$  menggunakan tatatanda fungsi.

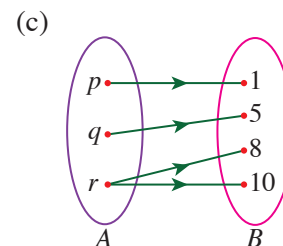
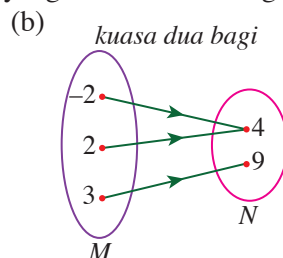
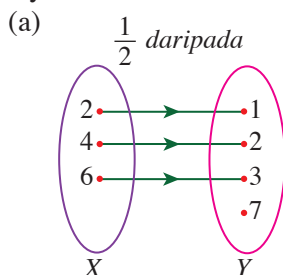
### Penyelesaian

Tatatanda untuk fungsi tersebut ialah  $g : x \rightarrow x^2$  atau  $g(x) = x^2$ .

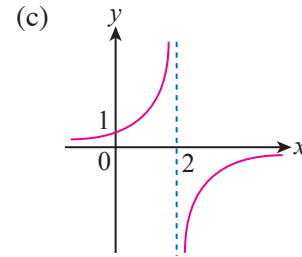
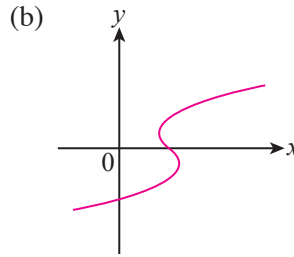
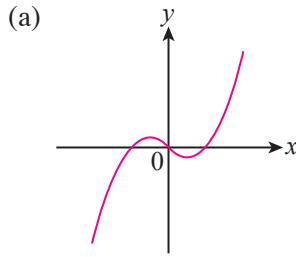


### Latih Diri 1.1

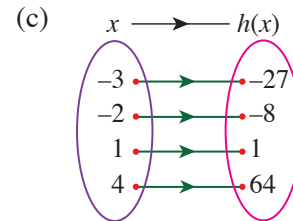
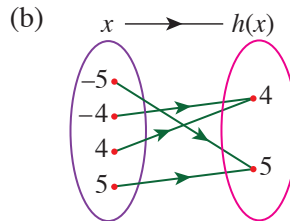
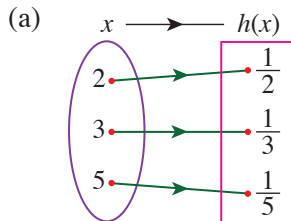
1. Nyatakan sama ada hubungan yang berikut ialah fungsi atau bukan. Beri alasan anda.



2. Tentukan sama ada graf yang berikut ialah fungsi atau bukan dengan menggunakan ujian garis mencancang.



3. Dengan menggunakan tatatanda fungsi, ungkapkan  $h$  dalam sebutan  $x$  bagi setiap gambar rajah anak panah yang berikut.



### Menentukan domain dan julat bagi suatu fungsi

#### INKUIRI 1

Berkumpulan

PAK-21

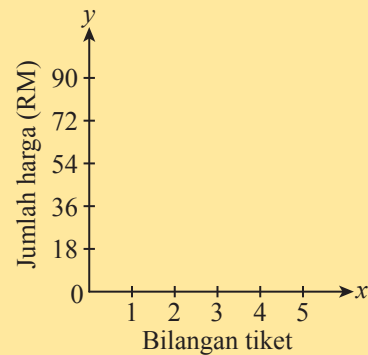
**Tujuan:** Meneroka domain dan julat suatu fungsi diskret dan selanjar

**Arahan:**

1. Setiap kumpulan dikehendaki memilih satu situasi yang berikut.

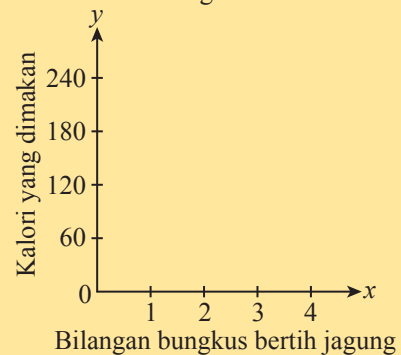
#### Situasi I

Fungsi  $y = 18x$  mewakili harga tiket, dalam RM, bagi  $x$  keping tiket yang dibeli oleh sebuah keluarga untuk menonton tayangan filem. Lukiskan graf fungsi untuk pembelian 1 hingga 5 keping tiket.



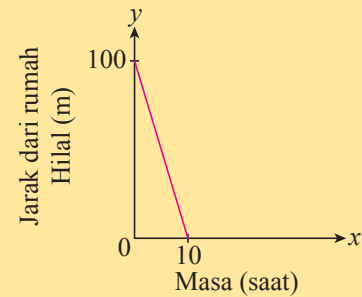
#### Situasi II

Sebungkus bertih jagung mengandungi 60 kalori.  $y$  kalori adalah fungsi bagi bilangan  $x$  bungkus bertih jagung yang dimakan. Lukiskan graf bagi fungsi untuk pembelian 1 hingga 4 bungkus bertih jagung.



**Situasi III**

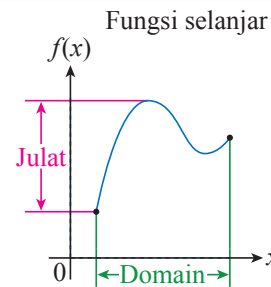
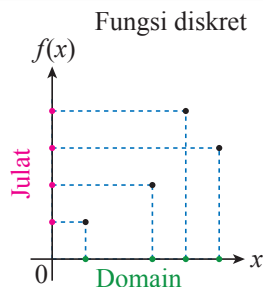
Hilal berbasikal sejauh 100 m dari rumah rakannya dengan laju  $10 \text{ m s}^{-1}$ . Dengan laju yang sama, Hilal ke rumah rakannya semula untuk mengambil buku yang tertinggal. Lengkapkan graf jarak-masa bagi perjalanan Hilal.



- Berdasarkan graf yang dibina, bincang bersama-sama ahli kumpulan anda dan jawab soalan yang berikut.
  - Adakah graf bagi fungsi yang dipilih diskret atau selanjat? Jelaskan.
  - Kenal pasti domain dan julat bagi graf fungsi tersebut.
- Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Inkuiri 1, didapati bahawa titik-titik pada graf fungsi diskret adalah nyata dan terpisah serta tidak bersambung dengan garis atau lengkung. Pada graf fungsi selanjat pula, titik-titik disambungkan dengan garis lurus atau lengkung dalam selang tertentu. Jadi, Situasi I mewakili fungsi diskret manakala Situasi II dan III mewakili fungsi selanjat.

Secara amnya, domain bagi suatu fungsi ialah set nilai  $x$  yang mungkin, yang membuatkan suatu fungsi tertakrif manakala julat pula ialah set nilai  $y$  yang diperoleh selepas menggantikan semua nilai  $x$  yang mungkin itu.



Perhatikan gambar rajah anak panah bagi fungsi diskret  $f$  dalam Rajah 1.3. Dalam fungsi ini, unsur-unsur dalam set  $X$  masing-masing dihubungkan dengan suatu unsur tertentu dalam set  $Y$ .

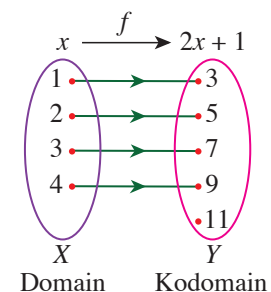
Set unsur  $X$ , iaitu nilai-nilai  $x$  yang boleh digantikan ke dalam  $f$  dinamakan **domain** manakala set unsur dalam  $Y$ , iaitu nilai-nilai yang mungkin muncul bagi fungsi  $f$  dinamakan **kodomain**. Set unsur dalam  $Y$  yang dipetakan dari  $X$ , iaitu nilai-nilai yang sebenarnya muncul bagi fungsi  $f$  dinamakan **julat**.

Maka, kita peroleh

$$\text{Domain} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Kodomain} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$\text{Julat} = \{3, 5, 7, 9\}$$



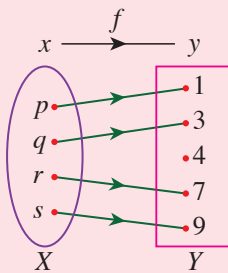
**Rajah 1.3**

Pertimbangkan pula fungsi selanjat  $f(x) = 2x + 1$  yang boleh mengambil semua nilai  $x$  dari 1 hingga 4. Bolehkah anda tentukan domain, kodomain dan julatnya?

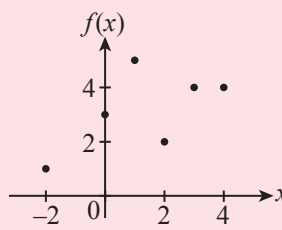
## Contoh 4

Tentukan domain, kodomain dan julat bagi setiap fungsi  $f$  yang berikut.

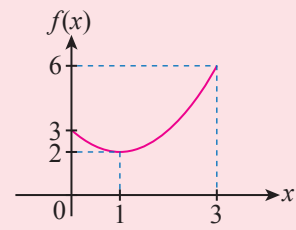
(a)



(b)



(c)



## Penyelesaian

(a) Domain =  $\{p, q, r, s\}$   
 Kodomain =  $\{1, 3, 4, 7, 9\}$   
 Julat =  $\{1, 3, 7, 9\}$

(b) Domain =  $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4\}$   
 Kodomain =  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$   
 Julat =  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

(c) Domain  $f$  ialah  $0 \leq x \leq 3$ .  
 Kodomain  $f$  ialah  $2 \leq f(x) \leq 6$ .  
 Julat  $f$  ialah  $2 \leq f(x) \leq 6$ .

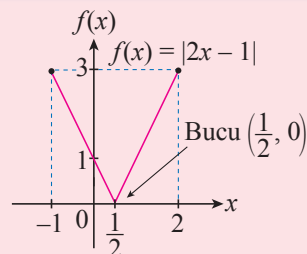
## Contoh 5

Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow |2x - 1|$ . Lakarkan graf bagi  $f$  untuk domain  $-1 \leq x \leq 2$  dan nyatakan julat  $f$  yang sepadan untuk domain itu.

## Penyelesaian

Graf  $f(x) = |2x - 1|$  boleh dilakarkan dengan memplot beberapa titik dalam domain  $-1 \leq x \leq 2$  seperti dalam jadual berikut.

$x$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = f(x) =  2x - 1 $	3	1	0	1	3
$(x, y)$	$(-1, 3)$	$(0, 1)$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 3)$



Daripada graf, julat bagi  $f: x \rightarrow |2x - 1|$  ialah  $0 \leq f(x) \leq 3$ .

## Kaedah Alternatif

Daripada Contoh 5, lukis graf  $y = 2x - 1$  dalam domain  $-1 \leq x \leq 2$  terlebih dahulu. Bahagian graf yang berada di bawah paksi-x dipantulkan pada paksi-x untuk memperoleh graf bagi  $f(x) = |2x - 1|$ .



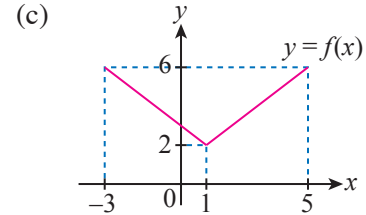
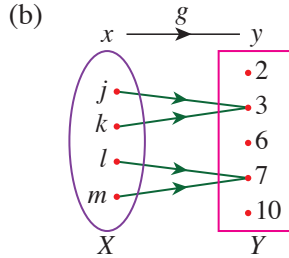
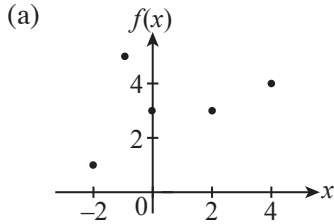
## Gelik Teknologi

Dengan menggunakan perisian GeoGebra, lukis graf  $y = |x|$ ,  $y = 2|x|$ ,  $y = 4|x|$  dan  $y = \frac{1}{2}|x|$ .

Apakah pola yang dapat anda perhatikan? Bolehkah anda meramalkan graf bagi  $y = 8|x|$  dan  $y = \frac{1}{4}|x|$ ?

## Latih Diri 1.2

1. Tentukan domain, kodomain dan julat bagi setiap fungsi yang berikut.



2. Lakarkan graf fungsi yang berikut untuk domain  $-2 \leq x \leq 4$ . Seterusnya, nyatakan julat yang sepadan dengan domain yang diberi.

(a)  $f: x \rightarrow |x + 1|$

(b)  $f(x) = |4 - 2x|$

(c)  $f: x \rightarrow |2x - 5|$



### Menentukan imej suatu fungsi apabila objek diberi dan sebaliknya

Pertimbangkan sebuah mesin pengisar buah-buahan. Apabila kita memasukkan buah oren ke dalam mesin itu, jus buah oren akan terhasil. Mustahil untuk kita mendapat jus lain selain jus buah oren.

Bayangkan analogi ini dengan menganggap fungsi sebagai sebuah mesin dengan input dan outputnya sebagai objek dan imejnya. Sehubungan dengan itu, jika objek  $x$  diberi dan digantikan ke dalam suatu fungsi, maka imej  $f(x)$  yang sepadan boleh ditentukan. Begitu juga jika imej  $f(x)$  diberi, objek  $x$  boleh ditentukan.



### Contoh 6

Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow 3x + \frac{5}{x}, x \neq 0$ . Cari

(a)  $f(5)$ ,

(b) imej bagi  $\frac{1}{3}$  di bawah  $f$ ,

(c) nilai-nilai  $x$  yang mungkin apabila imejnya ialah 8.

### Penyelesaian

(a)  $f(5) = 3(5) + \frac{5}{5}$   
 $= 15 + 1$   
 $= 16$

(b) Diberi  $f(x) = 3x + \frac{5}{x}$ .

Imej bagi  $\frac{1}{3}$ ,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5}{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$= 1 + 15$$

$$= 16$$

(c)  $f(x) = 8$

$$3x + \frac{5}{x} = 8$$

$$3x^2 + 5 = 8x$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$(3x - 5)(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ atau } x = 1$$

Maka, nilai-nilai  $x$  yang mungkin ialah

$$x = \frac{5}{3} \text{ dan } x = 1.$$



### Cabar Minda

$$f: x \rightarrow 3x + \frac{5}{x}, x \neq 0.$$

Mengapakah  $x \neq 0$ ?

Jika  $f(x) = \frac{2}{x+3}, x \neq k$ ,  
apakah nilai  $k$ ?

Darabkan kedua-dua belah persamaan dengan  $x$ .

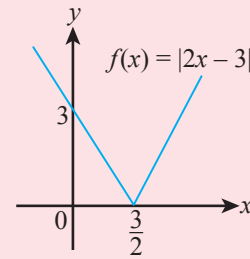


## Contoh 7

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf

$$f(x) = |2x - 3|, \text{ cari}$$

- nilai bagi  $f(-2)$  dan  $f(4)$ ,
- nilai-nilai  $x$  dengan keadaan  $f(x) = 5$ ,
- nilai-nilai  $x$  yang memetakan kepada diri sendiri,
- domain bagi  $f(x) < 1$ ,
- domain bagi  $f(x) \geq 3$ .



## Penyelesaian

- $$f(-2) = |2(-2) - 3| = |-7| = 7$$

$$f(4) = |2(4) - 3| = |5| = 5$$
- $$f(x) = 5$$

$$|2x - 3| = 5$$

$$2x - 3 = -5 \quad \text{atau} \quad 2x - 3 = 5$$

$$2x = -2 \quad \quad \quad 2x = 8$$

$$x = -1 \quad \quad \quad x = 4$$
- $$f(x) = x$$

$$|2x - 3| = x$$

$$2x - 3 = -x \quad \text{atau} \quad 2x - 3 = x$$

$$3x = 3 \quad \quad \quad x = 3$$

$$x = 1$$
- $$f(x) < 1$$

$$|2x - 3| < 1$$

$$-1 < 2x - 3 < 1$$

$$2 < 2x < 4$$

$$1 < x < 2$$
- $$f(x) \geq 3$$

$$2x - 3 \leq -3 \quad \text{atau} \quad 2x - 3 \geq 3$$

$$2x \leq 0 \quad \quad \quad 2x \geq 6$$

$$x \leq 0 \quad \quad \quad x \geq 3$$

QR

Penyelesaian bagi persamaan dan ketaksamaan yang melibatkan nilai mutlak.



bit.ly/2Gvg8FI

## Latih Diri 1.3

- Fungsi  $g$  ditakrifkan oleh  $g : x \rightarrow 3 + \frac{6}{x-1}, x \neq 1$ .
  - Cari imej bagi  $-5, -2$  dan  $\frac{1}{2}$ .
  - Diberi imej bagi  $b$  ialah  $2b$ , cari nilai-nilai yang mungkin bagi  $b$ .
- Fungsi  $h$  ditakrifkan oleh  $h : x \rightarrow \frac{kx-3}{x-1}, x \neq 1$ . Cari nilai  $k$  dengan keadaan
  - $h(2) = 5$
  - $h(3) = k$
  - $h(k) = k$
- Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f : x \rightarrow |4x - 3|$ , hitung
  - $f(-2)$  dan  $f(-\frac{1}{2})$ ,
  - nilai-nilai  $x$  dengan keadaan  $f(x) = 1$ ,
  - domain bagi  $f(x) < 1$ ,
  - domain bagi  $f(x) > 5$ .
- Diberi  $g(x) = |6 - 2x|$ , cari nilai-nilai  $x$  jika  $g(x) = x$ .
- Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f : x \rightarrow mx + c$ . Diberi  $f(2) = 7$  dan  $f(4) = -1$ , cari
  - nilai  $m$  dan nilai  $c$ ,
  - imej bagi 2 di bawah  $f$ ,
  - nilai  $x$  yang tidak berubah di bawah pemetaan  $f$ .

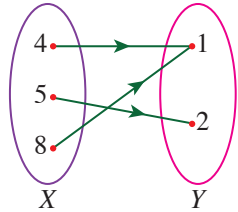
**Latihan Intensif 1.1**

Imbas kod QR atau layari bit.ly/2StPC4k untuk kuiz

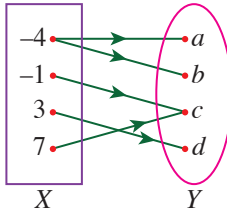


1. Antara hubungan berikut, yang manakah adalah fungsi? Berikan alasan anda.

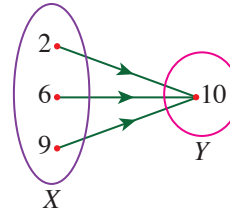
(a)



(b)

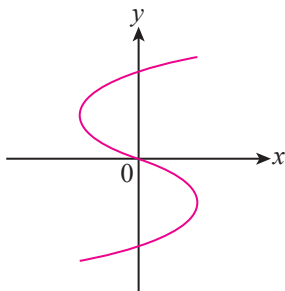


(c)

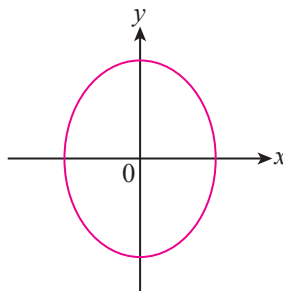


2. Dengan menggunakan ujian garis mencancang, tentukan sama ada graf yang berikut ialah fungsi atau bukan.

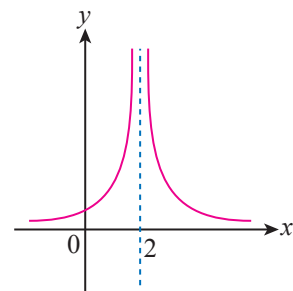
(a)



(b)

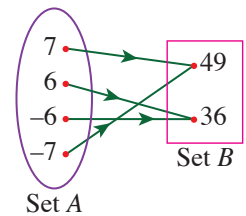


(c)



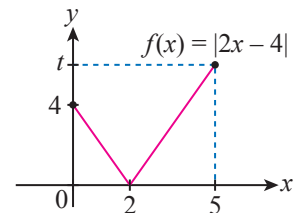
3. Rajah di sebelah menunjukkan imej bagi unsur-unsur tertentu set A.

- (a) Adakah hubungan itu merupakan fungsi? Jika ya, nyatakan alasan anda.  
(b) Nyatakan domain dan julat hubungan itu.  
(c) Dengan menggunakan tatatanda fungsi, tulis satu hubungan antara set A dan set B.



4. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi fungsi  $f(x) = |2x - 4|$  untuk domain  $0 \leq x \leq 5$ . Cari

- (a) nilai  $t$ ,  
(b) julat  $f$  berdasarkan domain yang diberi,  
(c) julat nilai  $x$  dengan keadaan  $f(x) \leq 4$ .



5. Seketul batu jatuh ke tanah dari ketinggian 81 meter. Tinggi batu itu,  $H$  meter, selepas  $t$  saat, dianggarkan oleh  $H(t) = 81 - 9t^2$ .

- (a) Nyatakan ketinggian batu itu apabila  
(i)  $t = \frac{1}{3}$  saat,  
(ii)  $t = 1$  saat,  
(iii)  $t = 2$  saat.  
(b) Bilakah batu itu mencecah permukaan tanah?



## 1.2 Fungsi Gubahan

Gambar foto di sebelah menunjukkan tumpahan minyak yang berlaku dari sebuah kapal. Tumpahan minyak itu membentuk sebuah bulatan. Luas tumpahan minyak,  $A$ , yang berbentuk bulatan itu ialah fungsi dengan jejari,  $r$ , dalam meter, dan boleh dimodelkan sebagai  $A = f(r) = \pi r^2$ .

Panjang jejari,  $r$  meningkat dengan masa,  $t$ , dalam jam, diukur dari saat bermulanya tumpahan minyak. Hubungan ini boleh dimodelkan sebagai  $r = g(t) = 100t$ . Dengan menggantikan  $r = 100t$  ke dalam fungsi  $A = f(r) = \pi r^2$ , kita peroleh:

$$\begin{aligned} A &= f(100t) \\ &= \pi(100t)^2 \\ &= 10\,000 \pi^2 \text{ m}^2 \end{aligned}$$



Jika masa  $t$  diberi, maka luas tumpahan minyak itu boleh diketahui. Apakah yang dapat anda katakan tentang gabungan dua fungsi  $A = f(r)$  dan  $r = g(t)$  yang menghasilkan  $A = f[g(t)]$ ?



### Memerihkan hasil gubahan dua fungsi

#### INKUIRI 2

Berkumpulan

PAK-21

**Tujuan:** Meneroka hasil gubahan dua fungsi  $f$  dan  $g$   
**Arahan:**

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Diberi fungsi  $f(x) = x + 2$  dan  $g(x) = x^2$  serta graf masing-masing.
3. Perhatikan graf yang terbentuk pada satah.
4. Klik pada butang  $f[g(x)]$  dan perhatikan graf yang terpapar pada satah.
5. Bagaimanakah untuk memperoleh fungsi  $f[g(x)]$ ?
6. Apakah bentuk graf yang terhasil daripada gabungan fungsi  $f$  dan  $g$ ?
7. Seterusnya, klik semula pada butang  $f[g(x)]$  untuk memadam graf  $f[g(x)]$  tersebut.
8. Klik pada butang  $g[f(x)]$  dan perhatikan graf yang terpapar pada satah.
9. Bagaimanakah graf  $g[f(x)]$  diperoleh?
10. Apakah bentuk graf yang terhasil daripada gabungan fungsi  $g$  dan  $f$ ?
11. Kemudian, tukarkan fungsi  $f$  dan  $g$  masing-masing dengan fungsi yang lain untuk meneroka hasil gubahan dua fungsi dan grafnya.
12. Setiap kumpulan akan bergerak ke kumpulan lain untuk melihat hasil dapatan.
13. Bincang dengan ahli kumpulan anda tentang hasil dapatan kumpulan lain.



[bit.ly/2U5VrEq](https://bit.ly/2U5VrEq)

Hasil daripada Inkuiri 2, didapati bahawa fungsi  $f[g(x)]$  diperoleh dengan menggantikan fungsi  $g$  ke dalam fungsi  $f$  manakala fungsi  $g[f(x)]$  diperoleh dengan menggantikan fungsi  $f$  ke dalam fungsi  $g$ .

Proses gabungan secara penggantian dua fungsi  $f$  dan  $g$  untuk menghasilkan  $f[g(x)]$  atau  $g[f(x)]$  ini dikenali sebagai hasil gubahan dua fungsi dan ditulis sebagai  $fg(x)$  atau  $gf(x)$ .  $fg(x)$  dibaca sebagai “ $f$  gubahan  $g$  bagi  $x$ ” dan ditakrifkan oleh  $fg(x) = f[g(x)]$ .

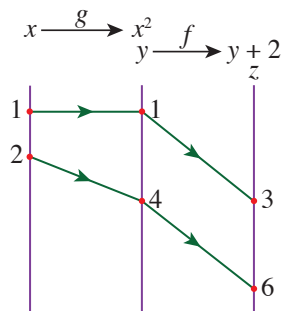
Secara amnya:

Diberi dua fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$ , hasil gabungan dua fungsi yang ditulis sebagai  $fg(x)$  atau  $gf(x)$  ditakrifkan sebagai  $fg(x) = f[g(x)]$  atau  $gf(x) = g[f(x)]$ .



### Menentukan fungsi gubahan

Diberi fungsi  $f(x) = x + 2$  dan  $g(x) = x^2$ . Rajah di bawah menunjukkan sebahagian daripada pemetaan di bawah fungsi  $g$  diikuti oleh fungsi  $f$ .



$$\begin{aligned} 1 &\xrightarrow{g} 1^2 = 1 \xrightarrow{f} 1 + 2 = 3 \\ 2 &\xrightarrow{g} 2^2 = 4 \xrightarrow{f} 4 + 2 = 6 \\ x &\xrightarrow{g} x^2 = y \xrightarrow{f} y + 2 = z = x^2 + 2 \end{aligned}$$

Berdasarkan pola dalam rajah di atas, kita boleh meringkaskannya seperti gambar rajah anak panah di sebelah.

Daripada gambar rajah anak panah, didapati bahawa terdapat satu pemetaan secara langsung daripada satu unsur  $x \in X$  kepada satu unsur  $z \in Z$  yang ditakrifkan oleh fungsi  $fg(x) = x^2 + 2$ .

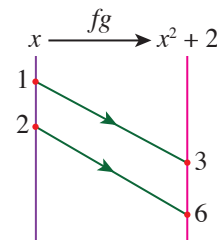
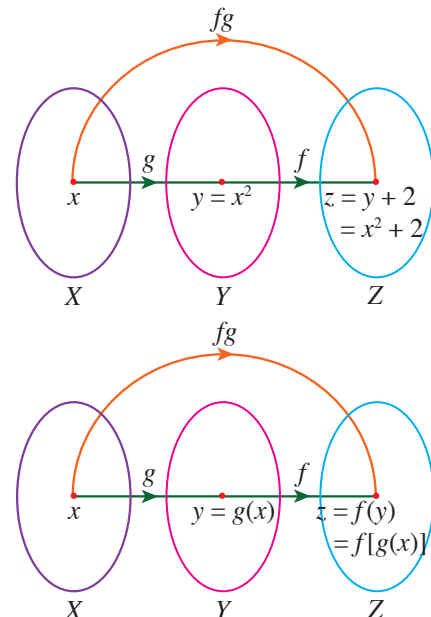
Fungsi baharu bagi gabungan dua fungsi  $f$  dan  $g$  dengan domain  $X$  dan kodomain  $Z$  dikenali sebagai fungsi gubahan  $f$  dan  $g$  yang diwakili oleh fungsi  $fg$ .

Maka, daripada proses yang ditunjukkan, kita boleh simpulkan bahawa:

$$fg(x) = f[g(x)]$$

Secara algebra, fungsi gubahan  $fg(x)$  boleh ditentukan seperti berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2 \\ fg(x) &= f[g(x)] \leftarrow g(x) = x^2 \\ &= f(x^2) \\ &= x^2 + 2 \text{ atau } fg : x \rightarrow x^2 + 2 \end{aligned}$$



## Contoh 8

Dua fungsi ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow 2x$  dan  $g: x \rightarrow x^2 - 5$ .  
Tentukan fungsi gubahan yang berikut.

- (a)  $fg$  (b)  $gf$   
(c)  $f^2$  (d)  $g^2$

## Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a) } fg(x) &= f[g(x)] \\ &= f(x^2 - 5) \\ &= 2(x^2 - 5) \\ &= 2x^2 - 10 \end{aligned}$$

Maka,  $fg: x \rightarrow 2x^2 - 10$

$$\begin{aligned} \text{(b) } gf(x) &= g[f(x)] \\ &= g(2x) \\ &= (2x)^2 - 5 \\ &= 4x^2 - 5 \end{aligned}$$

Maka,  $gf: x \rightarrow 4x^2 - 5$

$$\begin{aligned} \text{(c) } f^2(x) &= f[f(x)] \\ &= f(2x) \\ &= 2(2x) \\ &= 4x \end{aligned}$$

Maka,  $f^2: x \rightarrow 4x$

$$\begin{aligned} \text{(d) } g^2 &= g[g(x)] \\ &= g(x^2 - 5) \\ &= (x^2 - 5)^2 - 5 \\ &= x^4 - 10x^2 + 25 - 5 \\ &= x^4 - 10x^2 + 20 \end{aligned}$$

Maka,  $g^2: x \rightarrow x^4 - 10x^2 + 20$



## Cabar Minda

Adakah fungsi gubahan,  $fg$  dan  $gf$  sentiasa berbeza?

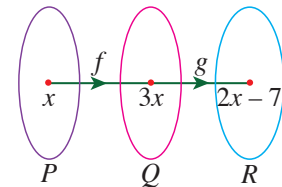


$f^2$  adalah sama dengan  $ff$ .  
Begitu juga dengan  $g^2$  yang sama dengan  $gg$ .

## Latih Diri 1.4

1. Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi  $f$  memetakan set  $P$  kepada set  $Q$  dan fungsi  $g$  memetakan set  $Q$  kepada set  $R$ .  
Tentukan

- (a) fungsi  $f$ ,  
(b) fungsi  $gf$ .



2. Untuk setiap pasangan fungsi berikut, dapatkan ungkapan dalam bentuk tatatanda fungsi bagi  $fg$ ,  $gf$ ,  $f^2$  dan  $g^2$ .
- (a)  $f: x \rightarrow 3x$ ,  $g: x \rightarrow 3 - x$   
(b)  $f: x \rightarrow 4 + 2x$ ,  $g: x \rightarrow x^2$   
(c)  $f: x \rightarrow x + 4$ ,  $g: x \rightarrow \frac{6}{x}$ ,  $x \neq 0$   
(d)  $f: x \rightarrow x - 5$ ,  $g: x \rightarrow \frac{1}{x-1}$ ,  $x \neq 1$
3. Dua fungsi  $f$  dan  $g$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow 3x + 4$  dan  $g: x \rightarrow x^2 + 6$ . Cari ungkapan bagi  $fg$  dan  $gf$ , kemudian cari nilai-nilai  $x$  apabila
- (a)  $f = g$   
(b)  $fg = gf$
4. Diberi bahawa  $f: x \rightarrow ax + b$  dan  $f^2: x \rightarrow 4x - 9$ , cari nilai-nilai pemalar  $a$  dan  $b$ .
5. Jika  $f: x \rightarrow 3x + k$  dan  $g: x \rightarrow 2h - 3x$  dengan keadaan  $fg = gf$ , cari hubungan antara  $h$  dengan  $k$ .



## Menentukan imej atau objek bagi suatu fungsi gubahan

Dengan menggantikan nilai bagi objek ke dalam suatu fungsi gubahan, imejnya boleh ditentukan. Begitu juga jika nilai bagi imej diberi, maka objek boleh ditentukan dengan menyelesaikan persamaan itu.

### Contoh 9

Jika  $f: x \rightarrow x - 1$  dan  $g: x \rightarrow x^2 - 3x + 4$ , cari

- (a)  $fg(2)$  dan  $gf(1)$ ,  
 (b) nilai-nilai  $x$  apabila  $fg(x) = 7$ .

### Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a) } fg(x) &= f[g(x)] \\ &= f(x^2 - 3x + 4) \\ &= x^2 - 3x + 4 - 1 \\ &= x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } fg(2) &= (2)^2 - 3(2) + 3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gf(x) &= g[f(x)] \\ &= g(x - 1) \\ &= (x - 1)^2 - 3(x - 1) + 4 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 3x + 3 + 4 \\ &= x^2 - 5x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } gf(1) &= (1)^2 - 5(1) + 8 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } fg(x) &= 7 \\ x^2 - 3x + 3 &= 7 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x + 1)(x - 4) &= 0 \end{aligned}$$

$$x = -1 \text{ atau } x = 4$$

Maka, nilai-nilai  $x$  ialah  $-1$  dan  $4$ .

### Kaedah Alternatif

$$\begin{aligned} \text{(a) } g(2) &= 2^2 - 3(2) + 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka, } fg(2) &= f(2) \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

### Latih Diri 1.5

1. Diberi dua fungsi  $f$  dan  $g$ .

(a)  $f: x \rightarrow 2x + 1$  dan  $g: x \rightarrow \frac{x}{x-1}$ ,  $x \neq 1$ , cari  $fg(3)$ .

(b)  $f: x \rightarrow 5x + 6$  dan  $g: x \rightarrow 2x - 1$ , cari  $gf\left(-\frac{1}{5}\right)$ .

(c)  $f: x \rightarrow \frac{x+1}{x-3}$ ,  $x \neq 3$  dan  $g: x \rightarrow \frac{6}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ , cari  $f^2(4)$  dan  $g^2\left(\frac{1}{2}\right)$ .

(d)  $f: x \rightarrow x^2 - 4$  dan  $g: x \rightarrow \frac{2}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ , cari  $f^2(-1)$  dan  $g^2(1)$ .

2. Bagi setiap fungsi berikut, cari nilai bagi objek  $x$ .

(a)  $f: x \rightarrow 2x - 5$ ,  $g: x \rightarrow \frac{10}{x}$ ,  $x \neq 0$  dan  $fg(x) = 5$ .

(b)  $f: x \rightarrow x^2 - 1$ ,  $g: x \rightarrow 2x + 1$  dan  $gf(x) = 7$ .

(c)  $f: x \rightarrow 3x - 2$  dan  $f^2(x) = 10$ .

(d)  $g: x \rightarrow \frac{2}{x-2}$ ,  $x \neq 2$  dan  $g^2(x) = -\frac{1}{2}$ .



## Menentukan suatu fungsi apabila fungsi gubahan dan salah satu fungsinya diberi

Apabila suatu fungsi gubahan dan salah satu fungsinya diberi, maka fungsi yang satu lagi boleh ditentukan.

### Contoh 10

Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow x - 2$ . Cari fungsi  $g$  dalam setiap yang berikut.

(a)  $fg: x \rightarrow 8x - 7$

(b)  $gf: x \rightarrow x^2 + 3x - 5$

### Penyelesaian

(a)  $f[g(x)] = 8x - 7$

$$g(x) - 2 = 8x - 7$$

$$g(x) = 8x - 7 + 2$$

$$g(x) = 8x - 5$$

Maka,  $g: x \rightarrow 8x - 5$

(b)  $g[f(x)] = x^2 + 3x - 5$

$$g(x - 2) = x^2 + 3x - 5$$

Katakan  $y = x - 2$

$$x = y + 2$$

Jadi,  $g(y) = (y + 2)^2 + 3(y + 2) - 5$

$$= y^2 + 4y + 4 + 3y + 6 - 5$$

$$= y^2 + 7y + 5$$

Gantikan  $y$  dengan  $x$ ,  $g(x) = x^2 + 7x + 5$

Maka,  $g: x \rightarrow x^2 + 7x + 5$

### Latih Diri 1.6

- Diberi fungsi  $f$  dan fungsi gubahan  $fg$ , tentukan fungsi  $g$  bagi setiap yang berikut.
  - $f: x \rightarrow x - 3, fg: x \rightarrow 2x^2 - 4x + 7$
  - $f: x \rightarrow x^2 + 1, fg: x \rightarrow x^2 + 4x + 5$
- Diberi fungsi  $f$  dan fungsi gubahan  $gf$ , tentukan fungsi  $g$  bagi setiap yang berikut.
  - $f: x \rightarrow x + 1, gf: x \rightarrow x^2 - 2x - 3$
  - $f: x \rightarrow x^2 + 3, gf: x \rightarrow 2x^2 + 3$
- Diberi fungsi  $h(x) = \frac{8}{x}, x \neq 0$  dan  $hg(x) = 4x$ , cari
  - $g(x)$ ,
  - nilai  $x$  apabila  $gh(x) = 6$ .
- Diberi fungsi  $g(x) = 3x$  dan  $fg(x) = 9x - 7$ , cari
  - $f(x)$ ,
  - $gf(2)$ .



## Menyelesaikan masalah melibatkan fungsi gubahan

### Contoh 11

Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow \frac{1}{x^2}, x \neq 0$ .

- Ungkapkan  $f^2(x), f^3(x)$  dan  $f^4(x)$  dalam bentuk yang paling ringkas.
- Seterusnya, cari  $f^{22}(x)$  dan  $f^{33}(x)$ .



## Penyelesaian

$$(a) f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f[f(x)] \\ &= f\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= x^4 \\ &= x^{2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f[f^2(x)] \\ &= f(x^4) \\ &= \frac{1}{(x^4)^2} \\ &= \frac{1}{x^8} \\ &= x^{-2^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^4(x) &= f[f^3(x)] \\ &= f\left(\frac{1}{x^8}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{x^8}\right)^2} \\ &= x^{16} \\ &= x^{2^4} \end{aligned}$$

(b) Daripada pola dalam (a), kita boleh deduksikan bahawa  $f^n(x) = x^{-2^n}$  apabila  $n$  ganjil dan  $f^n(x) = x^{2^n}$  apabila  $n$  genap. Maka,  $f^{22}(x) = x^{2^{22}}$  dan  $f^{33}(x) = x^{-2^{33}}$ .

## Contoh 12

## APLIKASI MATEMATIK

Jumlah pengeluaran barangan sehari,  $q$ , oleh sebuah kilang bergantung kepada bilangan pekerja,  $n$ , dan fungsinya

dimodelkan oleh  $q(n) = 10n - \frac{1}{4}n^2$ . Jumlah pendapatan sehari,  $r$ ,

dalam RM, yang diterima daripada jualan  $q$  barangan pula dimodelkan oleh fungsi  $r(q) = 40q$ . Tentukan jumlah pendapatan kilang itu dalam masa sehari jika bilangan pekerja ialah 20 orang.



## Penyelesaian

## 1. Memahami masalah

- ◆ Diberi dua fungsi,  $q$  dan  $r$  masing-masing ditakrifkan oleh  $q(n) = 10n - \frac{1}{4}n^2$  dan  $r(q) = 40q$ .
- ◆ Cari jumlah pendapatan kilang dalam masa sehari dengan 20 orang pekerja.

## 2. Merancang strategi

- ◆ Cari fungsi gubahan  $rq(n)$  terlebih dahulu untuk menentukan jumlah pendapatan kilang,  $r$  merupakan fungsi bagi bilangan pekerja,  $n$ , iaitu  $r(n)$ .
- ◆ Gantikan  $n = 20$  ke dalam fungsi gubahan  $r(n)$  yang diperoleh untuk menentukan jumlah pendapatan sehari, dalam RM, kilang itu.



### 3. Melaksanakan strategi

$$\begin{aligned}
 rq(n) &= r[q(n)] \\
 &= r\left(10n - \frac{1}{4}n^2\right) \\
 &= 40\left(10n - \frac{1}{4}n^2\right) \\
 &= 400n - 10n^2
 \end{aligned}$$

Oleh itu,  $r(n) = 400n - 10n^2$

Dengan 20 orang pekerja,

$$\begin{aligned}
 r(20) &= 400(20) - 10(20^2) \\
 &= 8\,000 - 4\,000 \\
 &= 4\,000
 \end{aligned}$$

Maka, pendapatan kilang itu dengan pekerja seramai 20 orang ialah RM4 000 sehari.

### 4. Membuat refleksi

Apabila  $r(n) = 4\,000$ ,

$$\begin{aligned}
 4\,000 &= 400n - 10n^2 \\
 10n^2 - 400n + 4\,000 &= 0 \\
 n^2 - 40n + 400 &= 0 \\
 (n - 20)(n - 20) &= 0 \\
 n &= 20
 \end{aligned}$$

Maka, pendapatan kilang sebanyak RM4 000 akan diperoleh apabila bilangan pekerja ialah 20 orang.

### Latih Diri 1.7

- Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow \frac{x}{x+1}, x \neq -1$ .
  - Cari fungsi berulang  $f^2, f^3$  dan  $f^4$ .
  - Seterusnya, tuliskan fungsi bagi  $f^{20}$  dan  $f^{23}$ .
- Jika  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}, x \neq 0$ , cari
  - fungsi berulang  $f^2, f^3$  dan  $f^4$ ,
  - nilai bagi  $f^{40}(2)$  dan  $f^{43}(2)$ .
- Luas permukaan sebuah belon udara panas,  $A$ , dalam  $\text{m}^2$ , yang berisi udara panas diberi oleh fungsi  $A(r) = 4\pi r^2$  dengan  $r$  ialah jejari belon, dalam meter. Jejari belon itu bertambah sebagai fungsi masa,  $t$ , dalam saat, mengikut rumus  $r(t) = \frac{2}{3}t^3, t \geq 0$ .
  - Nyatakan luas permukaan belon,  $A$ , sebagai fungsi masa,  $t$ .
  - Cari luas permukaan belon setelah 2 saat.
- Sebuah bekas berbentuk silinder berjejari 20 cm mengandungi  $200 \text{ cm}^3$  air. Air diisi ke dalam bekas itu dengan kadar malar  $100 \text{ cm}^3$  per saat.
  - Tuliskan rumus untuk
    - kuantiti air,  $v$ , di dalam bekas itu selepas  $t$  saat,
    - tinggi air,  $h$ , di dalam bekas itu dalam sebutan  $v$ ,
    - fungsi gubahan  $hv(t)$ .
  - Cari tinggi air di dalam bekas itu selepas 20 saat.
- Seketul batu kecil dibaling ke dalam sebuah kolam yang tenang dan menghasilkan riak air berbentuk bulatan. Jejari,  $r$ , dalam cm, bagi riak air itu bertambah dengan kadar 3 cm per saat.
  - Cari ungkapan bagi jejari,  $r$ , dalam sebutan masa,  $t$ , selepas batu itu dibaling.
  - Jika  $A$  ialah luas riak air, terangkan maksud fungsi gubahan  $Ar(t)$ .
  - Cari luas  $A$ , riak air itu selepas 30 saat.

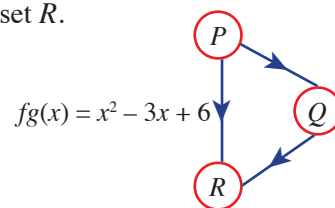
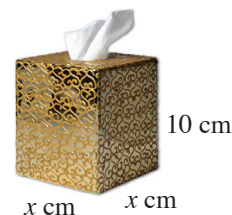


**Latihan Intensif 1.2**

Imbas kod QR atau layari bit.ly/2LBm7wR untuk kuiz



- Dua fungsi ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow 2x - 1$  dan  $g: x \rightarrow \frac{x}{x+1}$ ,  $x \neq -1$ . Cari
  - $fg$  dan  $gf$ ,
  - $fg(2)$  dan  $gf\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,
  - nilai  $x$  apabila  $fg = gf$ .
- Fungsi  $f$  dan  $g$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow \frac{x}{x-1}$ ,  $x \neq 1$  dan  $g: x \rightarrow hx + k$ , dengan keadaan  $h$  dan  $k$  ialah pemalar. Diberi  $g(3) = 8$  dan  $gf(2) = 5$ , cari
  - nilai  $h$  dan nilai  $k$ ,
  - nilai  $a$  jika  $fg(a) = 3$ .
- Fungsi  $f$  dan  $g$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow ax - b$  dengan  $a$  dan  $b$  ialah pemalar dan  $g: x \rightarrow x + 4$ . Diberi  $fg(2) = 9$  dan  $gf\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ , cari nilai  $a$  dan nilai  $b$ .
- Fungsi  $f$  dan  $g$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow \frac{2}{x-3}$ ,  $x \neq 3$  dan  $g: x \rightarrow hx^2 + k$ , dengan keadaan  $h$  dan  $k$  ialah pemalar.
  - Diberi  $g(2) = 5$  dan  $gf(1) = -1$ , hitung nilai  $h$  dan nilai  $k$ .
  - Cari ungkapan bagi  $gf$ .
- Diberi bahawa  $f: x \rightarrow ax + b$  dan  $f^3: x \rightarrow 27x + 13$ , cari
  - nilai  $a$  dan nilai  $b$ ,
  - ungkapan bagi  $f^4$ .
- Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kotak tisu dengan tapak berbentuk segi empat sama bersisi  $x$  cm dan tinggi 10 cm.
  - Tulis luas tapak kotak,  $A$  sebagai fungsi  $x$  dan isi padu kotak,  $V$  sebagai fungsi  $A$ .
  - Tunjukkan isi padu,  $V$  adalah hasil gubahan daripada kedua-dua fungsi ini.
- Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow x + 6$ . Cari fungsi  $g$  dalam setiap yang berikut.
  - $fg: x \rightarrow 2x^2 - 3x - 7$
  - $gf: x \rightarrow x^2 + 4$
  - $gf: x \rightarrow 8 - x$
- Rajah di sebelah menunjukkan hubungan antara set  $P$ , set  $Q$  dan set  $R$ . Diberi bahawa set  $P$  dipetakan kepada set  $Q$  oleh fungsi  $\frac{x-1}{3}$  dan dipetakan kepada set  $R$  oleh  $fg: x \rightarrow x^2 - 3x + 6$ .
  - Tulis fungsi yang memetakan set  $P$  kepada set  $Q$  dengan menggunakan tatatanda fungsi.
  - Cari fungsi yang memetakan set  $Q$  kepada set  $R$ .
- Diberi  $f: x \rightarrow px + q$  dan  $f^3: x \rightarrow 8x - 7$ ,
  - cari nilai  $p$  dan nilai  $q$ ,
  - tentukan fungsi  $f^4$ ,
  - dengan melihat pola  $f, f^2, f^3$  dan  $f^4$ , tentukan rumus umum  $f^n$  untuk  $n$  bilangan kali.
- $N$  buah kereta yang dikeluarkan oleh sebuah kilang kereta dalam masa satu hari selepas  $t$  jam beroperasi diberi oleh  $N(t) = 100t - 5t^2$ ,  $0 \leq t \leq 10$ . Jika kos, dalam RM, untuk mengeluarkan  $x$  buah kereta ialah  $C(N) = 15\,000 + 8\,000x$ , cari kos  $C$  sebagai fungsi masa  $t$ , bagi operasi kilang itu.



### 1.3 Fungsi Songsang

Anda membaca berita dalam talian yang menyatakan bahawa suhu di New York ialah  $39^{\circ}\text{F}$ . Bagaimanakah cara untuk mengetahui suhu tersebut dalam darjah Celsius?

Hubungan antara penunjuk angka pada sebatang termometer Fahrenheit,  $F$  dan darjah Celsius,  $C$  ialah suatu fungsi

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32. \text{ Dengan menjadikan } C \text{ sebagai perkara rumus,}$$

iaitu  $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$  dan menggantikan nilai  $F = 39$  ke dalam fungsi  $C$ , suhu di New York dalam darjah Celsius akan diketahui.

$$F : C \rightarrow \frac{9}{5}C + 32$$

$$C : F \rightarrow \frac{5}{9}(F - 32)$$



(Sumber: <https://www.necn.com/weather/maps/NECN-Weather-Now-250228521.html>)

Adakah dengan melakukan operasi songsang seperti ini akan menghasilkan fungsi songsang bagi  $F$ ?



#### Memerihalkan songsangan suatu fungsi

Fungsi songsang bagi suatu fungsi  $f$  boleh ditulis sebagai  $f^{-1}$ . Misalnya:

$$f : x \rightarrow x + 2$$

$$f^{-1} : x \rightarrow x - 2$$

Apakah yang dimaksudkan dengan songsangan suatu fungsi? Untuk mengetahui dengan lebih terperinci, mari kita ikuti penerokaan yang berikut.

#### INKUIRI 3

Berkumpulan

PAK-21

**Tujuan:** Meneroka perkaitan antara suatu graf fungsi dengan graf fungsi songsangnya

**Arahan:**

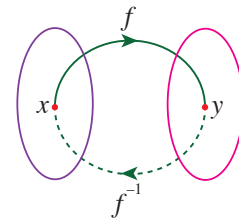
1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik butang semua fungsi dan perhatikan graf yang terbentuk.
3. Adakah graf bagi setiap fungsi dan graf fungsi songsangnya bersimetri dengan garis  $h(x) = x$ ?
4. Lakukan perbincangan dalam kumpulan masing-masing.



[ggbm.at/tvaq4zfs](https://ggbm.at/tvaq4zfs)

Hasil daripada Inkuiri 3, didapati bahawa setiap graf fungsi dan graf fungsi songsangnya bersimetri pada garis  $h(x) = x$ , iaitu garis  $y = x$ . Graf  $f^{-1}$  ialah pantulan bagi graf  $f$  pada garis  $y = x$ .

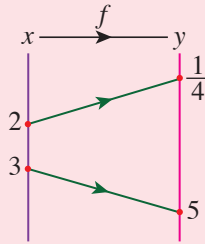
$$f : x \rightarrow y \Leftrightarrow f^{-1} : y \rightarrow x \text{ atau } y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



## Contoh 13

Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi  $f$  memetakan  $x$  kepada  $y$ . Tentukan

- (a)  $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$  (b)  $f^{-1}(5)$



## Penyelesaian

- (a) Daripada gambar rajah anak panah yang diberi, kita peroleh

$$f(2) = \frac{1}{4}, \text{ maka } f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 2.$$

- (b) Melalui pemetaan songsang,  $f^{-1} : 5 \rightarrow 3$ .

$$\text{Maka, } f^{-1}(5) = 3. \quad \leftarrow f : x \rightarrow y \Leftrightarrow f^{-1} : y \rightarrow x$$



Tanda  $-1$  yang digunakan dalam  $f^{-1}$  bukan bermaksud salingan bagi  $f$ ,  $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$  tetapi  $f^{-1}$  ialah songsangan bagi  $f$ .

## Contoh 14

Suatu fungsi ditakrifkan sebagai  $f(x) = \frac{x}{x-4}$ ,  $x \neq 4$ . Tentukan

- (a) imej bagi 2 di bawah  $f$ , (b)  $f^{-1}(3)$ .

## Penyelesaian

- (a) Imej bagi 2,  $f(2) = \frac{2}{2-4} = -1$

- (b) Katakan  $a = f^{-1}(3)$ ,

$$f(a) = 3$$

$$\frac{a}{a-4} = 3$$

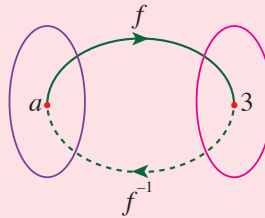
$$a = 3(a-4)$$

$$a = 3a - 12$$

$$2a = 12$$

$$a = 6$$

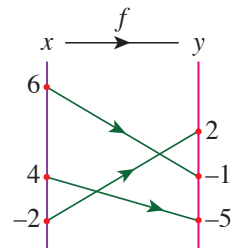
$$\text{Maka, } f^{-1}(3) = a = 6$$



## Latih Diri 1.8

1. Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi  $f$  memetakan  $x$  kepada  $y$ . Cari

- (a)  $f(4)$   
(b)  $f^{-1}(-1)$   
(c)  $f^{-1}(2)$   
(d)  $f^{-1}(-5)$



2. Fungsi  $g$  dan  $h$  masing-masing ditakrifkan oleh  $g(x) = \frac{5}{2-x}$ ,  $x \neq 2$  dan  $h(x) = 3x + 6$ , cari

- (a)  $g(12)$  (b)  $g^{-1}(4)$  (c)  $h(-1)$  (d)  $h^{-1}(9)$



## Membuat dan mengesahkan konjektur berkaitan sifat-sifat fungsi songsang

Lakukan Inkuiri 4, 5, 6 dan 7 yang berikut untuk membuat dan mengesahkan konjektur tentang sifat-sifat fungsi songsang.

### INKUIRI 4

Berkumpulan

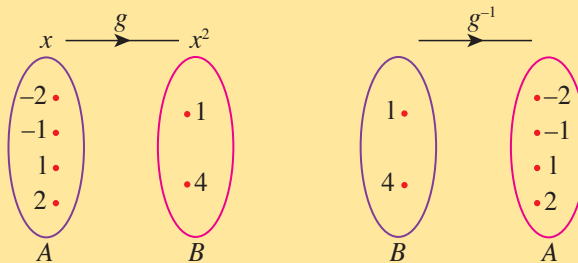
PAK-21

**Tujuan:** Membuat dan mengesahkan konjektur bahawa fungsi satu dengan satu mempunyai fungsi songsang

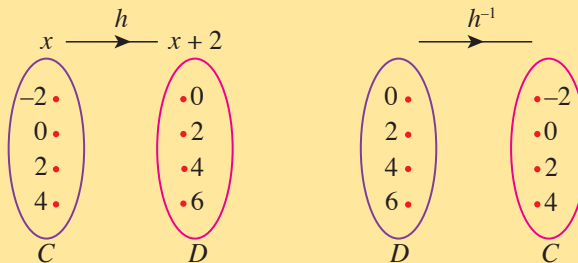
**Arahan:**

1. Salin dan lengkapkan pemetaan fungsi diskret yang berikut.

(a) Fungsi diskret  $g$  yang memetakan set  $A$  kepada set  $B$  dan  $g^{-1}$  yang memetakan set  $B$  kepada set  $A$ .



(b) Fungsi diskret  $h$  yang memetakan set  $C$  kepada set  $D$  dan  $h^{-1}$  yang memetakan set  $D$  kepada set  $C$ .



- Adakah  $g^{-1}$  dan  $h^{-1}$  merupakan suatu fungsi?
- Apakah jenis fungsi yang boleh menghasilkan fungsi songsang? Nyatakan konjektur anda.
- Setiap kumpulan perlu memilih seorang wakil untuk membentangkan hasil dapatan di hadapan kelas. Ahli kumpulan yang lain boleh bertanyakan soalan kepada wakil.
- Ulang langkah 4 sehingga semua kumpulan selesai membuat pembentangan.

Hasil daripada Inkuiri 4, didapati bahawa fungsi songsang ialah songsangan bagi suatu fungsi yang memetakan setiap unsur dalam kodomain kepada hanya satu unsur dalam domain. Maka, kita boleh rumuskan:

Suatu fungsi  $f$  yang memetakan set  $X$  kepada set  $Y$  mempunyai fungsi songsang  $f^{-1}$  jika  $f$  ialah fungsi satu dengan satu.

## INKUIRI 5

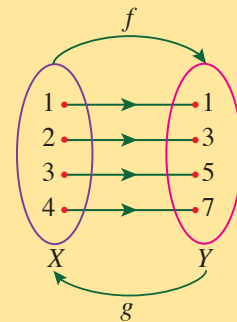
Berkumpulan

PAK-21

**Tujuan:** Membuat dan mengesahkan konjektur fungsi gubahan  $fg(x) = gf(x) = x$  dengan fungsi  $f$  dan  $g$  saling songsang antara satu sama lain

**Arahan:**

1. Gambar rajah anak panah di sebelah menunjukkan fungsi diskret  $f$  yang memetakan set  $X$  kepada set  $Y$  dan fungsi diskret  $g$  yang memetakan set  $Y$  kepada set  $X$ .
2. Lengkapkan petak kosong di bawah berdasarkan gambar rajah anak panah di sebelah.



$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 3 \\ f(3) &= \square \\ f(\square) &= \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 \\ g(3) &= 2 \\ g(5) &= \square \\ g(\square) &= \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gf(1) &= g(1) = 1 \\ fg(1) &= f(1) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gf(2) &= g(3) = 2 \\ fg(3) &= f(2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gf(3) &= g(\square) = \square \\ fg(5) &= f(\square) = \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gf(4) &= g(\square) = \square \\ fg(7) &= f(\square) = \square \end{aligned}$$

3. Daripada hasil dapatan, apakah konjektur yang dapat dibuat terhadap nilai  $fg(x)$  dan  $gf(x)$ ?
4. Setiap kumpulan membentangkan hasil dapatan masing-masing di hadapan kelas dan lakukan sesi soal jawab antara kumpulan.

Hasil daripada Inkuiri 5, dua fungsi  $f$  dan  $g$  ialah fungsi songsang antara satu sama lain jika dan hanya jika:

$$fg(x) = x, x \text{ dalam domain } g \text{ dan } gf(x) = x, x \text{ dalam domain } f.$$

## INKUIRI 6

Berkumpulan

PAK-21

**Tujuan:** Membuat dan mengesahkan konjektur jika dua fungsi  $f$  dan  $g$  saling songsang antara satu sama lain, maka

- (a) domain  $f$  = julat  $g$  dan domain  $g$  = julat  $f$
- (b) graf  $g$  adalah pantulan graf  $f$  pada garis  $y = x$ .



ggbm.at/e4beb2uu

**Arahan:**

1. Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada petak  $f(x) = \frac{1}{2}x$  untuk domain  $0 \leq x \leq 8$  dan perhatikan graf yang terbentuk.
3. Kemudian, klik pada petak  $g(x) = 2x$ , iaitu fungsi songsang bagi  $f$  dan perhatikan graf yang terpapar.
4. Lengkapkan domain dan julat bagi graf  $f$  dan  $g$  dalam jadual di sebelah.
5. Apakah konjektur anda tentang hasil dapatan ini?
6. Bagaimanakah kedudukan graf  $f$  dan  $g$  terhadap garis  $y = x$ ? Apakah konjektur anda?
7. Setiap wakil kumpulan bergerak ke kumpulan yang lain dan bentangkan hasil kumpulan masing-masing.

Graf	Domain	Julat
Graf fungsi $f$		
Graf fungsi $g$		

Hasil daripada Inkuiri 6, didapati bahawa:

- Jika dua fungsi  $f$  dan  $g$  ialah fungsi songsang antara satu sama lain, maka
- domain  $f$  = julat  $g$  dan domain  $g$  = julat  $f$
  - graf  $g$  adalah pantulan graf  $f$  pada garis  $y = x$

### INKUIRI 7

Berkumpulan

PAK-21

**Tujuan:** Membuat dan mengesahkan konjektur bahawa jika titik  $(a, b)$  berada pada graf  $f$ , maka titik  $(b, a)$  berada pada graf  $g$



ggbm.at/hg9yxsab

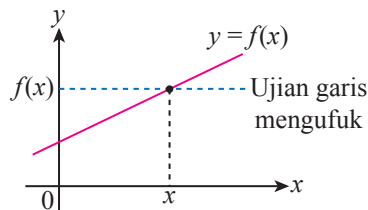
**Arahan:**

- Imbas kod QR atau layari pautan di sebelah.
- Klik pada petak  $f(x) = x^2 + 1$  untuk julat  $0 \leq x \leq 3$  dan fungsi songsangnya,  $g(x) = \sqrt{x - 1}$  untuk julat  $1 \leq x \leq 10$ .
- Kemudian, klik pada petak “Titik dan pantulan”. Seret titik A di sepanjang graf  $f$ . Perhatikan titik pada graf  $f$  dan graf  $g$ .
- Apakah konjektur yang dapat dibuat tentang titik yang anda perhatikan pada kedua-dua graf?
- Lakukan perbincangan dalam kumpulan mengenai hasil dapatan.
- Setiap kumpulan melantik seorang wakil dan lakukan pembentangan di hadapan kelas.

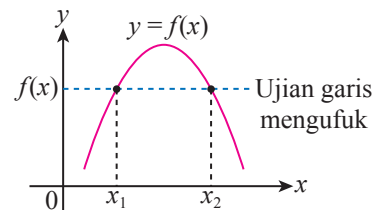
Hasil daripada Inkuiri 7, didapati bahawa:

Untuk mana-mana nombor nyata,  $a$  dan  $b$ , jika titik  $(a, b)$  berada pada graf  $f$ , maka titik  $(b, a)$  berada pada graf  $g$ , iaitu graf  $f^{-1}$ . Titik  $(b, a)$  di atas graf  $g$  ialah pantulan titik  $(a, b)$  di atas graf  $f$  pada garis  $y = x$ .

Untuk menentukan sama ada graf bagi suatu fungsi itu mempunyai fungsi songsang, ujian garis mengufuk boleh dilakukan. Jika garis mengufuk itu memotong suatu graf fungsi hanya pada satu titik, maka jenis fungsinya ialah satu dengan satu dan fungsi tersebut mempunyai fungsi songsang. Sebaliknya, jika garis mengufuk itu memotong suatu graf fungsi pada dua titik atau lebih, maka jenis fungsi itu bukan satu dengan satu dan fungsi tersebut tidak mempunyai fungsi songsang.



$f$  mempunyai fungsi songsang

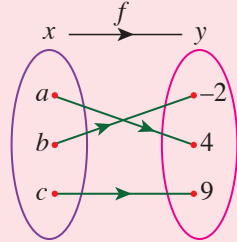


$f$  tidak mempunyai fungsi songsang

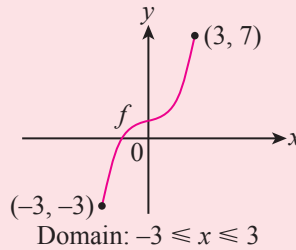
## Contoh 15

Tentukan sama ada setiap fungsi  $f$  berikut mempunyai fungsi songsang atau tidak. Berikan sebab bagi jawapan anda.

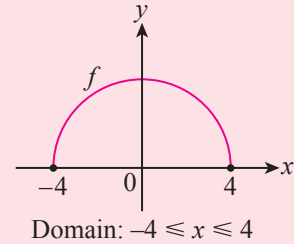
(a)



(b)



(c)

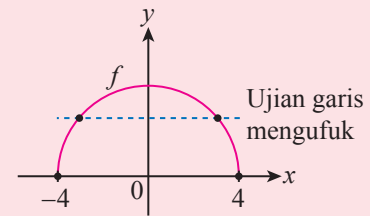
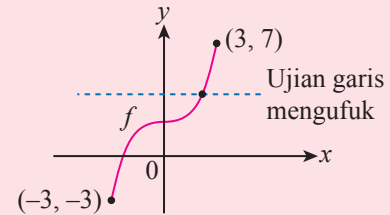


## Penyelesaian

(a)  $f$  ialah suatu fungsi kerana jenis fungsi tersebut ialah fungsi satu dengan satu dengan setiap unsur dalam domain dipetakan kepada hanya satu unsur dalam kodomain. Songsangan bagi fungsi ini juga memetakan setiap unsur dalam kodomain kepada hanya satu unsur dalam domain. Maka, fungsi  $f$  mempunyai fungsi songsang.

(b) Apabila ujian garis mengufuk dilakukan, garis mengufuk memotong graf  $f$  hanya pada satu titik. Ini bermaksud jenis fungsi  $f$  ini ialah fungsi satu dengan satu. Maka, fungsi  $f$  mempunyai fungsi songsang.

(c) Apabila ujian garis mengufuk dilakukan, garis mengufuk memotong graf  $f$  pada dua titik. Ini bermaksud fungsi  $f$  ini bukan fungsi satu dengan satu. Jadi, fungsi  $f$  tidak mempunyai fungsi songsang.



## Contoh 16

Sahkan kebenaran bahawa fungsi  $f(x) = 3 - 2x$  mempunyai fungsi songsang,  $g(x) = \frac{3-x}{2}$ .

## Penyelesaian

Tentukan  $fg(x)$  terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} fg(x) &= f[g(x)] \\ &= f\left(\frac{3-x}{2}\right) \\ &= 3 - 2\left(\frac{3-x}{2}\right) \\ &= 3 - (3-x) \\ &= x \end{aligned}$$

Kemudian, tentukan  $gf(x)$ .

$$\begin{aligned} gf(x) &= g[f(x)] \\ &= g(3 - 2x) \\ &= \frac{3 - (3 - 2x)}{2} \\ &= \frac{2x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Oleh sebab  $fg(x) = gf(x) = x$ , maka  $g(x) = \frac{3-x}{2}$  ialah fungsi songsang bagi  $f(x) = 3 - 2x$ .



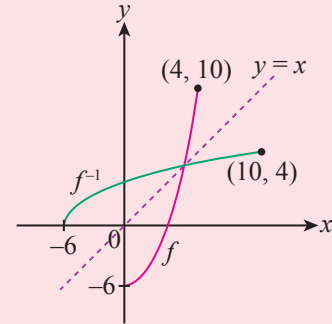
**Contoh 17**

Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow x^2 - 6$  untuk domain  $0 \leq x \leq 4$ . Pada satah yang sama, lakarkan graf bagi  $f$  dan  $f^{-1}$ . Seterusnya, nyatakan domain bagi  $f^{-1}$ .

**Penyelesaian**

Graf  $f$  ialah sebahagian daripada lengkung kuadratik  $y = x^2 - 6$ . Dengan memplot titik-titik dalam jadual nilai di bawah, graf  $f$  dilakar seperti dalam rajah di sebelah.

$x$	0	1	2	3	4
$y$	-6	-5	-2	3	10

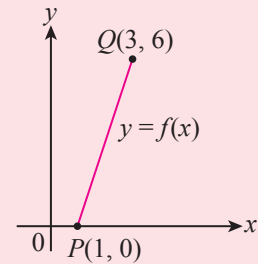


Graf  $f^{-1}$  pula ialah pantulan graf  $f$  pada garis  $y = x$ .

Domain bagi  $f^{-1}$  ialah julat bagi  $f$ . Maka, domain bagi  $f^{-1}$  ialah  $-6 \leq x \leq 10$ .

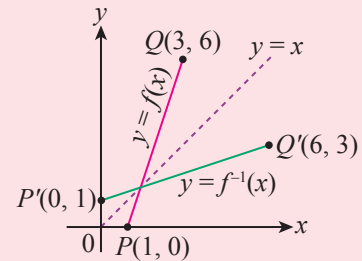
**Contoh 18**

Rajah di sebelah menunjukkan graf  $y = f(x)$  yang melalui titik  $P(1, 0)$  dan  $Q(3, 6)$ . Pada rajah yang sama, lakarkan graf  $y = f^{-1}(x)$  dengan menunjukkan titik-titik yang sepadan dengan titik  $P$  dan titik  $Q$ .

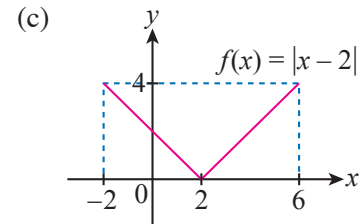
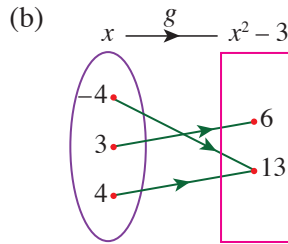
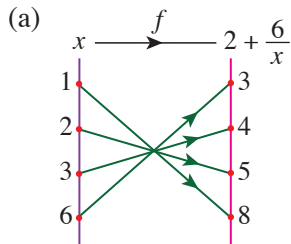
**Penyelesaian**

Graf  $y = f^{-1}(x)$  ialah pantulan bagi graf  $y = f(x)$  pada garis  $y = x$ .

Titik  $P'$  dan  $Q'$  pada graf  $y = f^{-1}(x)$  yang sepadan dengan titik  $P$  dan  $Q$  ditunjukkan seperti dalam rajah di sebelah.

**Latih Diri 1.9**

1. Tentukan sama ada setiap fungsi berikut mempunyai songsangan atau tidak.



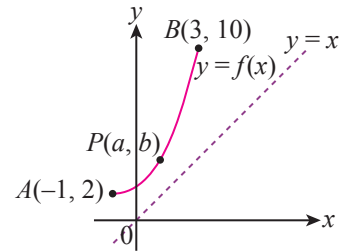
(d)  $\{(1, 2), (4, 5), (5, 8), (9, 9)\}$

(e)  $\{(-3, 2), (-1, 1), (2, 4), (5, 4), (9, 5)\}$

(f)  $f: x \rightarrow 4 - x^2$

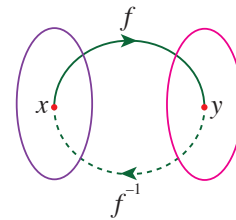
(g)  $f: x \rightarrow \frac{1}{(x-2)^2}, x > 2$

2. Adakah fungsi  $f$  dan  $g$  berikut ialah fungsi songsang antara satu sama lain? Sahkan kebenarannya dengan menggunakan hubungan  $fg(x) = gf(x) = x$ .
- (a)  $f(x) = 3x - 2$  dan  $g(x) = \frac{x+2}{3}$
- (b)  $f(x) = \frac{2x}{x-3}, x \neq 3$  dan  $g(x) = \frac{3x}{x-2}, x \neq 2$
- (c)  $f(x) = \frac{2}{x-3}, x \neq 3$  dan  $g(x) = \frac{3x-2}{x}, x \neq 0$
- (d)  $f(x) = 2 + 5x$  dan  $g(x) = \frac{x-5}{2}$
3. Fungsi  $f$  ditakrifkan sebagai  $f: x \rightarrow x^3$  untuk domain  $-1 \leq x \leq 2$ . Pada satah yang sama, lakarkan graf bagi  $f$  dan  $f^{-1}$ . Seterusnya, nyatakan domain dan julat bagi  $f^{-1}$ .
4. Fungsi  $h$  ditakrifkan sebagai  $h(x) = x^2 - 2$  untuk domain  $0 \leq x \leq 3$ .
- (a) Pada rajah yang sama, lakarkan graf bagi  $h$  dan  $h^{-1}$ .
- (b) Nyatakan domain bagi  $h^{-1}$ .
- (c) Cari nilai  $x$  dengan keadaan  $h(x) = h^{-1}(x)$ .
5. Koordinat bagi titik berikut terletak pada graf bagi fungsi satu dengan satu,  $f$ . Tentukan koordinatnya yang sepadan yang terletak pada graf  $f^{-1}$ .
- (a)  $P(-2, \frac{1}{2})$       (b)  $Q(1, -3)$       (c)  $R(4, 5)$       (d)  $S(-6, -8)$
6. Rajah di sebelah menunjukkan garis  $y = x$  dan graf bagi  $y = f(x)$  untuk domain  $-1 \leq x \leq 3$ . Titik  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 10)$  dan  $P(a, b)$  terletak pada graf itu.
- (a) Lakarkan graf  $y = f^{-1}(x)$  untuk menunjukkan titik-titik pada  $y = f^{-1}(x)$  yang sepadan dengan titik  $A$  dan  $B$ .
- (b) Cari nilai  $a$  dan  $b$ , jika koordinatnya yang sepadan terletak pada  $y = f^{-1}(x)$  ialah  $(4, 1)$ .



### Menentukan fungsi songsang

Kita telah mempelajari bahawa apabila diberi  $y = f(x)$ , maka  $x = f^{-1}(y)$ . Secara algebra, rumus fungsi songsang,  $f^{-1}(x)$  dengan fungsi asalnya ialah  $y = f(x)$  boleh ditentukan dengan mengikuti langkah-langkah yang berikut.



Ubah fungsi  $y = f(x)$  kepada bentuk  $x = f(y)$ .

Tulis  $x$  sebagai  $f^{-1}(y)$ .

Gantikan pemboleh ubah  $y$  dengan pemboleh ubah  $x$ .

## Contoh 19

Jika  $f: x \rightarrow 5x + 2$ , cari

- (a)  $f^{-1}(x)$  (b)  $f^{-1}(7)$

## Penyelesaian

(a)  $f(x) = 5x + 2$

Katakan  $y = 5x + 2$

$$5x = y - 2$$

$$x = \frac{y-2}{5} \leftarrow \text{Bentuk } x = f(y)$$

Oleh sebab  $x = f^{-1}(y)$ ,

$$f^{-1}(y) = x \leftarrow \text{Tulis } x \text{ sebagai } f^{-1}(y)$$

$$= \frac{y-2}{5}$$

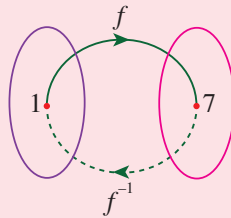
Gantikan pemboleh ubah  $y$  dengan  $x$ ,

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$$

Maka,  $f^{-1}: x \rightarrow \frac{x-2}{5}$ .

(b)  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$

Maka,  $f^{-1}(7) = \frac{7-2}{5}$   
 $= 1$



Semak kebenaran fungsi

$$\text{songsang } f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$$

yang diperoleh dalam Contoh 19(a) dengan menggunakan hubungan  $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$ .

$$ff^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)]$$

$$= 5\left(\frac{x-2}{5}\right) + 2$$

$$= x$$

$$f^{-1}f(x) = f^{-1}[f(x)]$$

$$= f^{-1}(5x + 2)$$

$$= \frac{5x + 2 - 2}{5}$$

$$= x$$

Oleh sebab  $ff^{-1}(x) = f^{-1}f(x) = x$ ,

maka  $f^{-1}: x \rightarrow \frac{x-2}{5}$  ialah

fungsi songsang bagi  $f: x \rightarrow 5x + 2$ .

## Latih Diri 1.10

1. Cari  $f^{-1}$  bagi setiap fungsi satu dengan satu yang berikut.

(a)  $f: x \rightarrow 2x - 5$

(b)  $f: x \rightarrow \frac{3}{x}, x \neq 0$

(c)  $f: x \rightarrow \frac{4}{x-1}, x \neq 1$

(d)  $f: x \rightarrow \frac{5x}{x-6}, x \neq 6$

(e)  $f: x \rightarrow \frac{x+9}{x-8}, x \neq 8$

(f)  $f: x \rightarrow \frac{2x-3}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$

2. Fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow \frac{3-x}{2x}, x \neq 0$ , cari

(a)  $f^{-1}(4)$ ,

(b) nilai-nilai  $x$  dengan keadaan  $f(x) = f^{-1}(x)$ .

3. Diberi fungsi  $h: x \rightarrow 4x + a$  dan  $h^{-1}: x \rightarrow 2bx + \frac{5}{8}$ , cari nilai pemalar  $a$  dan  $b$ .

4. Cari fungsi  $f$  dalam bentuk yang serupa bagi setiap  $f^{-1}$  yang berikut.

(a)  $f^{-1}: x \rightarrow 6x + 7$

(b)  $f^{-1}: x \rightarrow \frac{2-x}{5}$

(c)  $f^{-1}: x \rightarrow \frac{3x}{x-3}, x \neq 3$

5. Fungsi songsang  $g^{-1}$  ditakrifkan oleh  $g^{-1}: x \rightarrow \frac{4}{2-x}, x \neq k$ .

(a) Nyatakan nilai  $k$ .

(b) Cari  $g\left(\frac{1}{2}\right)$ .

### Latihan Intensif 1.3

Imbas kod QR atau layari bit.ly/2GHRphR untuk kuiz

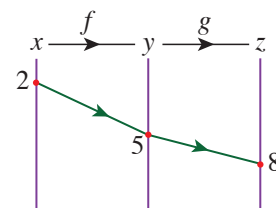
Fungsi



BAB 1

1. Dalam gambar rajah anak panah di sebelah, fungsi  $f$  memetakan  $x$  kepada  $y$  dan fungsi  $g$  memetakan  $y$  kepada  $z$ . Tentukan

- (a)  $f(2)$  (b)  $g(5)$   
(c)  $gf(2)$  (d)  $f^{-1}(5)$   
(e)  $g^{-1}(8)$  (f)  $f^{-1}g^{-1}(8)$



2. Dengan menggunakan ujian garis mengufuk, tentukan sama ada setiap fungsi berikut mempunyai fungsi songsang atau tidak.

- (a) (b) (c)

3. Rajah di bawah menunjukkan graf bagi fungsi satu dengan satu,  $f$ . Dalam setiap kes, lakarkan graf  $f^{-1}$  dan seterusnya nyatakan domain  $f^{-1}$ .

- (a) (b) (c)

4. Diberi  $f: x \rightarrow \frac{2x+h}{x-3}$ ,  $x \neq 3$  dan  $f(4) = 13$ , cari

- (a) nilai  $h$ , (b)  $f^{-1}(3)$ ,  
(c) nilai  $m$  apabila  $f^{-1}(m) = 2$ .

5. Fungsi songsang  $h^{-1}$  ditakrifkan oleh  $h^{-1}: x \rightarrow \frac{2}{3-x}$ ,  $x \neq 3$ , cari

- (a)  $h(x)$ , (b) nilai  $x$  dengan keadaan  $h(x) = 2$ .

6. Dua fungsi  $f$  dan  $g$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow 4x - 17$  dan  $g: x \rightarrow \frac{5}{2x-7}$ ,  $x \neq 3\frac{1}{2}$ . Selesaikan persamaan  $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$ .

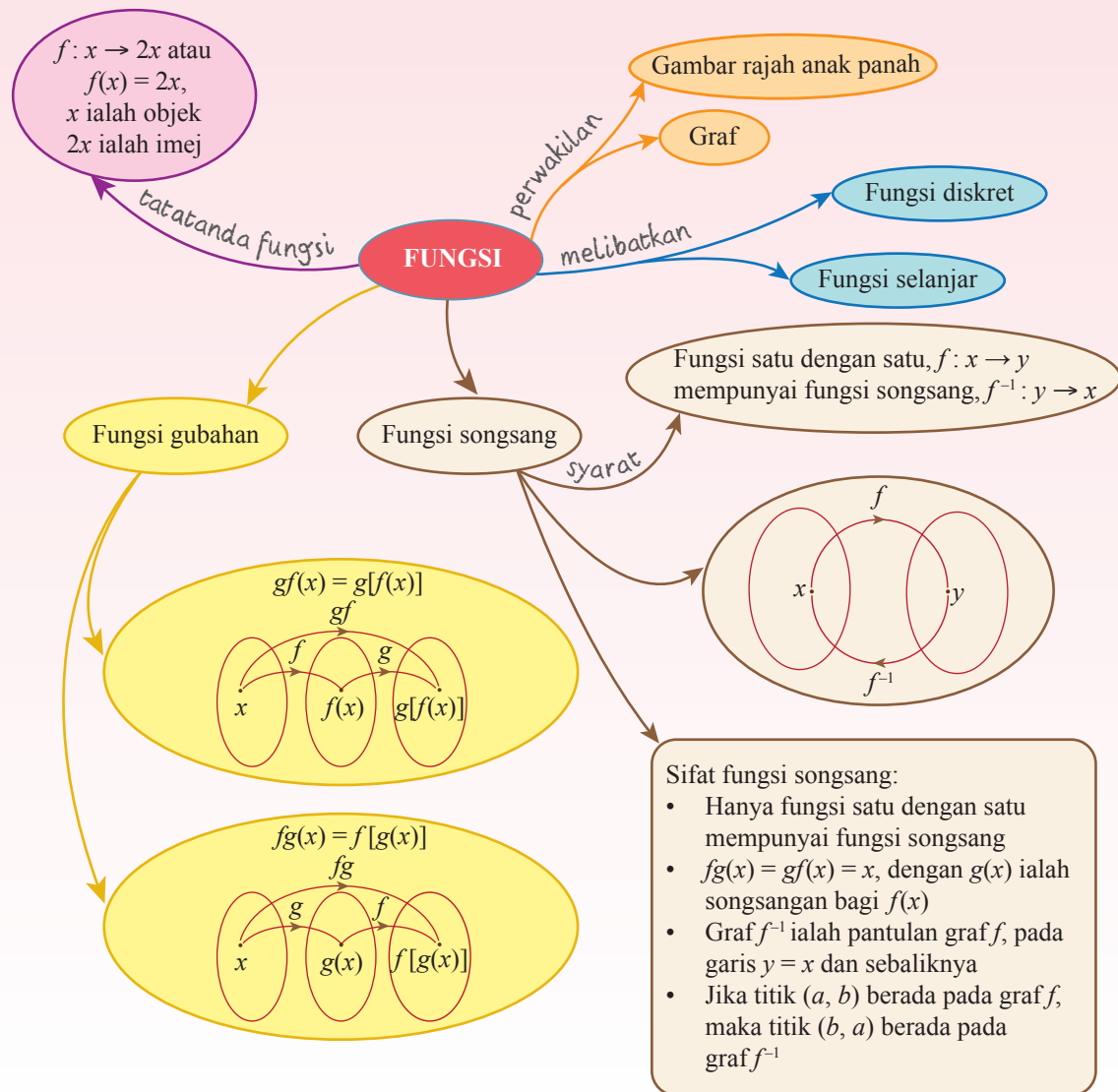
7. Faridah telah melakukan aktiviti senaman pada waktu riadah. Kemudian, Faridah menghitung anggaran laju degupan jantungnya dengan menggunakan fungsi  $f(x) = \frac{17}{20}(220 - x)$ , dengan  $x$  ialah usianya.

- (a) Tentukan songsangan bagi fungsi ini.  
(b) Jika usia Faridah ialah 16 tahun, tentukan anggaran laju degupan jantungnya.

8. Zaki ingin membuat bebola air berbentuk sfera yang boleh menampung  $\frac{1}{2} \text{ cm}^3$  air. Isi padu sfera,  $V$  diberi oleh  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , dengan  $r$  ialah jejari sfera. Zaki ingin mengetahui cara untuk menentukan  $r$  jika  $V$  diberi.
- Lukis gambar rajah anak panah bagi fungsi  $f$  yang memetakan  $r$  kepada  $V$  dan songsangannya  $f^{-1}$  yang memetakan  $V$  kepada  $r$ .
  - Seterusnya, tentukan jejari bebola itu agar dapat menampung isi padu air sesuai mengikut spesifikasinya.



## RUMUSAN BAB 1





## TULIS JURNAL ANDA

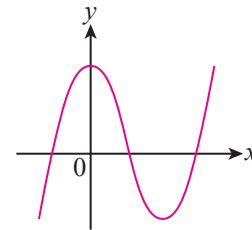
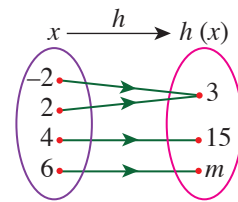
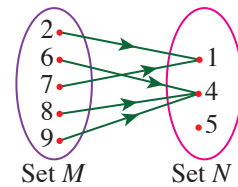


Buat carian dalam Internet dan buku-buku berkaitan sejarah penggunaan tatatanda fungsi  $y = f(x)$ . Buat satu folio digital menggunakan perisian persembahan seperti *Power Point*, *Prezi* atau *Powtoon*.

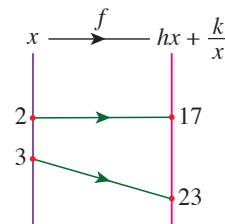


## LATIHAN PENGUKUHAN

- Gambar rajah anak panah di sebelah menunjukkan hubungan antara set  $M$  dan set  $N$ . **TP1**
  - Nyatakan
    - imej bagi 2,
    - objek bagi 4.
  - Adakah hubungan itu merupakan fungsi? Beri alasan anda.
  - Nyatakan domain, kodomain dan julat bagi hubungan itu.
- Gambar rajah anak panah di sebelah menunjukkan suatu fungsi  $h$ . **TP2**
  - Nyatakan nilai  $m$ .
  - Dengan menggunakan tatatanda fungsi, ungkapkan  $h$  dalam sebutan  $x$ .
- Dengan menggunakan ujian garis mencancang, tentukan sama ada graf di sebelah merupakan fungsi atau bukan. Jika ya, adakah fungsi itu fungsi satu dengan satu? Uji dengan melukis garis mengufuk pada graf itu. **TP2**



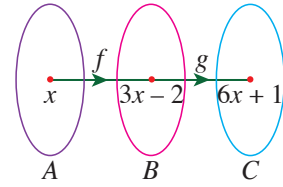
- Suatu fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow |x - 3|$  untuk domain  $-1 \leq x \leq 7$ . **TP3**
  - Lakarkan graf  $f$  dan nyatakan julat bagi  $f$ .
  - Cari julat nilai  $x$  dengan keadaan  $f(x) \leq 2$ .
  - Pada graf yang sama di (a), lakarkan graf  $y = 2x - 3$  dan seterusnya dapatkan nilai  $x$  dengan keadaan  $|x - 3| = 2x - 3$ .
- Gambar rajah anak panah di sebelah mewakili sebahagian daripada pemetaan  $f: x \rightarrow hx + \frac{k}{x}, x \neq 0$ , cari **TP3**
  - nilai  $h$  dan nilai  $k$ ,
  - imej bagi 6 di bawah pemetaan ini.



- Dua fungsi  $f$  dan  $g$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow \frac{x+2}{x-2}, x \neq 2$  dan  $g: x \rightarrow mx + c$ . Diberi bahawa  $g^{-1}(2) = f(3)$  dan  $gf^{-1}(2) = 5$ , cari nilai  $m$  dan nilai  $c$ . **TP3**

7. Dalam rajah di sebelah, fungsi  $f$  memetakan set  $A$  kepada set  $B$  dan fungsi  $g$  memetakan set  $B$  kepada set  $C$ . Cari **TP4**

- (a) dalam sebutan  $x$ , fungsi  
 (i) yang memetakan set  $B$  kepada set  $A$ ,  
 (ii)  $g(x)$ .  
 (b) nilai  $x$  dengan keadaan  $fg(x) = 4x - 3$ .

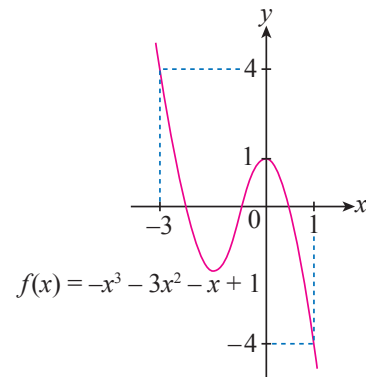


8. Suatu fungsi  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow \frac{m}{x-1} + n, x \neq k$ . Diberi  $f(2) = 3$  dan  $f(3) = 2$ , cari **TP3**

- (a) nilai  $k$ ,  
 (b) nilai  $m$  dan nilai  $n$ ,  
 (c)  $f^2(x)$ ,  
 (d)  $f^{-1}(2)$ .

9. Rajah di sebelah menunjukkan fungsi  $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 1$  untuk domain  $-3 \leq x \leq 1$ . **TP3**

- (a) Nyatakan  
 (i) sama ada fungsi  $f$  itu diskret atau selanjar,  
 (ii) julat  $f$  yang sepadan dengan domain yang diberi.  
 (b) Dengan menggunakan ujian garis mengufuk, tentukan sama ada  $f$  mempunyai fungsi songsang atau tidak.



10. Diberi fungsi  $f(x) = |x|$  dan  $f(x) = x^4$  bukan fungsi satu dengan satu. **TP5**

- (a) Tentukan syarat yang sesuai dalam domain  $f$  supaya fungsi baharu menjadi fungsi satu dengan satu.  
 (b) Daripada (a), cari fungsi songsang bagi setiap  $f$  itu.

11. Jika graf bagi suatu fungsi dan songsangannya bersilang, adakah kedua-dua graf ini akan bersilang pada garis  $y = x$ ? Apakah kemungkinan untuk kedua-dua graf ini bersilang pada garis yang lain? **TP5**

12. Diberi  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , cari  $f^{-1}(x)$ . **TP5**

- (a) Dengan menggunakan rumus  $f^{-1}$  yang diperoleh, tentukan  $f^{-1}$  bagi setiap fungsi berikut.  
 (i)  $f(x) = \frac{x+8}{x-5}, x \neq 5$   
 (ii)  $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}, x \neq -4$   
 (b) Jika  $c \neq 0$ , apakah syarat ke atas  $a, b, c$  dan  $d$  supaya  $f = f^{-1}$ ?

13. Suatu fungsi satu dengan satu  $f$  ditakrifkan oleh  $f: x \rightarrow x^2 - 2x$  untuk  $1 \leq x \leq 3$ . **TP6**

- (a) Dengan menggunakan perisian GeoGebra,  
 (i) lukis graf  $f$  dan daripada graf, nyatakan julat bagi  $f$ ,  
 (ii) lukis graf  $f^{-1}$  pada satah yang sama dan nyatakan domain  $f^{-1}$ .  
 (b) Apakah yang dapat anda katakan tentang julat  $f$  dan domain  $f^{-1}$  serta domain  $f$  dan julat  $f^{-1}$ ? Seterusnya, pada satah yang sama, lukis garis  $y = x$ .  
 (i) Adakah graf  $f^{-1}$  ialah pantulan bagi graf  $f$  pada garis itu?  
 (ii) Adakah titik  $(0, 2)$  pada graf  $f^{-1}$  merupakan pantulan bagi titik  $(2, 0)$  pada graf  $f$  pada garis  $y = x$ ? Apakah kesimpulan yang dapat anda buat?



14. Harga  $p$ , dalam RM, bagi suatu barangan dan kuantiti  $x$  yang dijual mengikut persamaan permintaan  $p = 100 - \frac{1}{4}x$  untuk  $0 \leq x \leq 400$ . Manakala kos  $C$ , dalam RM, untuk

mengeluarkan  $x$  unit ialah  $C = \frac{\sqrt{x}}{25} + 600$ . Anggapkan semua barangan yang dikeluarkan

terjual, cari **TP4**

- kos  $C$  sebagai fungsi bagi harga  $p$ ,
- kos untuk mengeluarkan barangan itu jika harga untuk satu unit barang dijual dengan harga RM36.



15. Tempoh  $T$ , dalam saat, bagi suatu bandul ringkas ialah fungsi bagi panjang  $l$ , dalam meter, ditakrifkan oleh  $T(l) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , dengan keadaan  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$  ialah pecutan bagi graviti. Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukiskan graf fungsi ini dan pada satah yang sama, lukiskan graf bagi fungsi berikut.

(a)  $T(l) = 2\pi \sqrt{\frac{l+4}{g}}$

(b)  $T(l) = 2\pi \sqrt{\frac{4l}{g}}$

Bagaimanakah perubahan dalam panjang memberi kesan kepada tempoh,  $T$  bandul itu? Bincangkan. **TP5**

## Penerokaan MATEMATIK

Jadual di bawah menunjukkan isi padu petrol yang digunakan oleh sebuah kereta di sebatang lebuh raya berbanding dengan jarak yang dilalui. Katakan  $l$  ialah isi padu petrol, dalam liter, yang digunakan dan  $d$  ialah jarak, dalam km, yang dilalui oleh kereta itu.

Petrol yang digunakan ( $l$ )	Jarak yang dilalui, dalam km ( $d$ )
4	48
8	96
12	144
16	192
20	240

- Berdasarkan jadual di atas,
  - berapakah jarak yang boleh dilalui oleh kereta itu menggunakan 1 liter petrol?
  - tentukan jarak yang dilalui,  $d$ , sebagai fungsi isi padu petrol yang digunakan,  $l$ .

$d(l) = \underline{\hspace{2cm}}$

- Dengan menggunakan perisian *GeoGebra*, lukis fungsi  $d$  yang diperoleh dalam soalan 1(b) dan daripada graf, tentukan yang berikut.
  - Berapakah isi padu petrol yang digunakan untuk perjalanan 300 km?
  - Berapakah jarak yang dapat dilalui untuk 100 l petrol?