BAB 2

PEMBEZAAN

Apakah yang akan dipelajari?

- Had dan Hubungannya dengan Pembezaan
- Pembezaan Peringkat Pertama
- Pembezaan Peringkat Kedua
- Aplikasi Pembezaan

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/2EOtFa4

Bakteria boleh menyebabkan pelbagai jenis penyakit berbahaya dan mengancam kehidupan kita. Bakteria menghasilkan toksin yang boleh merosakkan makanan. Makanan yang dicemari oleh bakteria akan mengakibatkan keracunan makanan dan boleh membawa maut jika tidak dirawat dengan segera. Antara penyakit yang menyerang manusia akibat bakteria ialah tifoid, demam dan pneumonia. Tahukah anda, rumus bagi bilangan pertumbuhan bakteria, p dengan populasi awal ialah 1 500 menggunakan rumus $p = 1\,500\left(\dfrac{1 + 5t}{t^2 + 30}\right)$, dengan t ialah masa, dalam jam? Bolehkah anda tentukan kadar pertumbuhan populasi bakteria selepas 3 jam? Masalah ini boleh diselesaikan dengan konsep pembezaan yang merupakan sebahagian daripada kalkulus.

Video mengenai pertumbuhan koloni bakteria.

bit.ly/364lwt8

Sudut Maklumat

Isaac Newton (1643-1727 TM) dan Gottfried Von Leibniz (1646-1716 TM) merupakan ahli matematik yang mula mempelopori prinsip asas kalkulus yang terdiri daripada pembezaan dan pengamiran.

Kalkulus berasal daripada perkataan Latin yang bermaksud batu kecil yang digunakan untuk menghitung dan menyelesaikan suatu permasalahan matematik pada zaman dahulu.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/2KFSrgc

Kepentingan Bab Ini

- Sebuah LRT (*Light Rapid Transit*) yang bergerak dengan kadar perubahan sesaran terhadap masa menunjukkan halaju seketika bagi LRT itu manakala kadar perubahan halaju terhadap masa menunjukkan pecutan seketika.
- Konsep pembezaan digunakan untuk menentukan peredaran darah dalam arteri pada masa tertentu serta jangka masa bagi penyakit tumor membesar dan mengecil di dalam badan manusia.

Kata Kunci

Had	*Limit*
Terbitan pertama	*First derivative*
Kecerunan tangen	*Gradient of tangent*
Terbitan kedua	*Second derivative*
Persamaan tangen	*Equation of tangent*
Persamaan normal	*Equation of normal*
Titik pusingan	*Turning point*
Kadar perubahan	*Rate of change*
Penghampiran	*Approximation*
Titik pegun	*Stationary point*
Titik lengkok balas	*Point of inflection*

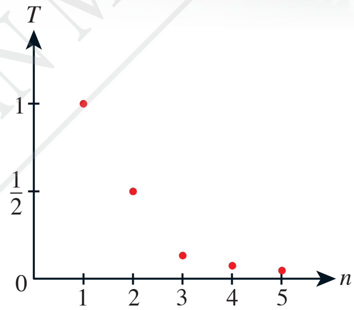
2.1 Had dan Hubungannya dengan Pembezaan

Had merupakan konsep asas dalam operasi pembezaan seperti halaju, v suatu objek pada masa t yang disebut sebagai halaju seketika. Misalnya, semasa pemanduan, bacaan pada meter laju kenderaan anda menunjukkan halaju 80 kmj^{-1}.

Apakah yang dimaksudkan dengan bacaan halaju 80 kmj^{-1} pada meter laju itu? Bagaimanakah nilai 80 kmj^{-1} ini diperoleh? Dengan kaedah had, kita boleh menentukan nilai tersebut melalui nilai penghampiran.

Nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubah menghampiri sifar

Pertimbangkan jujukan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ dengan sebutan amnya, $T_n = \frac{1}{n}$, dengan keadaan $n = 1, 2, 3, \ldots$



Perhatikan graf bagi jujukan itu seperti dalam rajah di sebelah. Apabila n semakin meningkat tanpa batas, apakah yang akan terjadi kepada sebutan, T jujukan itu? Adakah sebutannya semakin menghampiri sifar tetapi bukan sifar? Bolehkah anda tentukan had bagi jujukan ini?

Ikuti penerokaan berikut untuk meneroka nilai had suatu fungsi apabila pemboleh ubahnya menghampiri sifar pula.

Aktiviti Penerokaan 1 — Berkumpulan

Tujuan: Meneroka had suatu fungsi apabila pemboleh ubahnya menghampiri sifar

Langkah:

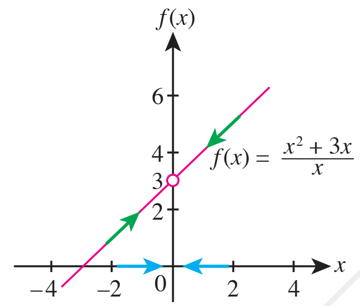
1. Pertimbangkan fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x}$, dengan domainnya ialah set semua nombor nyata, $\mathbb{R}$ kecuali sifar.
2. Tentukan nilai bagi $f(0)$. Adakah anda boleh memperoleh nilai tersebut? Jelaskan.
3. Salin dan lengkapkan jadual di bawah bagi fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x}$ apabila x menghampiri sifar dari arah kiri dan arah kanan. Seterusnya, lakarkan graf $y = f(x)$ dan tentukan nilai bagi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x}$.

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

4. Apakah yang anda boleh katakan tentang keputusan nilai $f(0)$ yang diperoleh dalam langkah 2 dengan nilai $\underset{x \to 0}{\text{had}} \dfrac{x^2 + 3x}{x}$ yang diperoleh dalam langkah 3? Bincangkan.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 1, didapati bahawa nilai bagi $f(0)$ tidak dapat ditentukan kerana menghasilkan suatu bentuk tak tentu, iaitu $\frac{0}{0}$. Oleh sebab had tidak dapat ditentukan secara penggantian langsung, maka nilai bagi $\underset{x \to 0}{\text{had}} \frac{x^2 + 3x}{x}$ boleh ditentukan seperti yang ditunjukkan dalam jadual dan rajah yang berikut.

x	$f(x)$
-0.1	2.9
-0.01	2.99
-0.001	2.999
-0.0001	2.9999
0 ← ⋮	⋮ → 3
0.0001	3.0001
0.001	3.001
0.01	3.01
0.1	3.1



Klik Teknologi

Dengan menggunakan kalkulator grafik, lukis graf bagi fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$ dan anggarkan nilai bagi $\underset{x \to 0}{\text{had}} f(x)$. Adakah fungsi f tertakrif di $x = 0$?

Bincangkan kesannya pada kewujudan had apabila x menghampiri sifar.

Berdasarkan jadual dan rajah di atas, apabila nilai x semakin menghampiri sifar sama ada dari arah kiri atau kanan, nilai $f(x)$ menghampiri 3. Jadi, apabila x menghampiri sifar dari salah satu arah, fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x}$ menghampiri 3, iaitu apabila $x \to 0$, $\frac{x^2 + 3x}{x} \to 3$. Nilai 3 disebut sebagai had bagi $\frac{x^2 + 3x}{x}$ apabila x menghampiri sifar dan pernyataan ini boleh diringkaskan dengan tatatanda:

$$\underset{x \to 0}{\text{had}}\ f(x) = \underset{x \to 0}{\text{had}} \frac{x^2 + 3x}{x} = 3$$

Secara amnya,

> Apabila x menghampiri a, dengan keadaan $x \neq a$, had bagi $f(x)$ ialah L dan ditulis sebagai $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x) = L$.

Cara-cara untuk menentukan $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x)$, dengan $a \in \mathbb{R}$ adalah seperti yang berikut:

Tentukan nilai had $f(x)$ dengan menggantikan nilai $x = a$ secara langsung ke dalam fungsi $f(x)$. Jika,

$f(a) \neq \frac{0}{0}$

Nilai $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x)$ telah diperoleh, iaitu $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x) = f(a)$.

$f(a) = \frac{0}{0}$

Tentukan $\underset{x \to a}{\text{had}}\ f(x)$ dengan cara:
- Pemfaktoran
- Merasionalkan pengangka atau penyebut fungsi itu.

Contoh 1

Tentukan nilai had bagi setiap fungsi yang berikut.

(a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - \sqrt{x}}{x + 2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$

Penyelesaian

(a) Gunakan penggantian secara langsung.

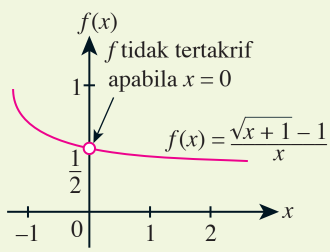
$$\underset{x \to 4}{\text{had}} \frac{3 - \sqrt{x}}{x + 2} = \frac{3 - \sqrt{4}}{4 + 2} = \frac{3 - 2}{4 + 2} = \frac{1}{6}$$

(b) Apabila $x = 1$, $\underset{x \to 1}{\text{had}} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ adalah dalam bentuk tak tentu, $\dfrac{0}{0}$.
Jadi, lakukan pemfaktoran dan hapuskan faktor sepunya sebelum melakukan penggantian secara langsung.

$$\begin{aligned}
&\underset{x \to 1}{\text{had}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
&= \underset{x \to 1}{\text{had}} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} && \longleftarrow \text{Faktorkan pengangka dan hapuskan faktor sepunya} \\
&= \underset{x \to 1}{\text{had}} \, (x + 1) \\
&= 1 + 1 && \longleftarrow \text{Penggantian langsung} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(c) Apabila melakukan penggantian langsung, bentuk tak tentu, $\dfrac{0}{0}$ akan diperoleh. Jadi, rasionalkan pengangka bagi pecahan dengan mendarabkannya dengan konjugat, iaitu $\sqrt{x + 1} + 1$.

$$\begin{aligned}
&\underset{x \to 0}{\text{had}} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} \\
&= \underset{x \to 0}{\text{had}} \left[\left(\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} + 1}\right)\right] && \longleftarrow \text{Darabkan dengan konjugat bagi pengangka} \\
&= \underset{x \to 0}{\text{had}} \frac{(x + 1) - 1}{x\left(\sqrt{x + 1} + 1\right)} && \longleftarrow (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\
&= \underset{x \to 0}{\text{had}} \frac{x}{x\left(\sqrt{x + 1} + 1\right)} && \longleftarrow \text{Hapuskan faktor sepunya} \\
&= \underset{x \to 0}{\text{had}} \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{0 + 1} + 1} && \longleftarrow \text{Penggantian langsung} \\
&= \frac{1}{1 + 1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



Klik Teknologi

Lakarkan graf bagi setiap fungsi yang berikut.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$

(b) $f(x) = x + 1$

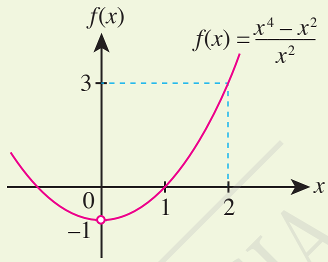
Daripada graf, cari had bagi setiap fungsi itu apabila x menghampiri 1.

Dengan menggunakan perisian geometri dinamik, lukis graf bagi setiap fungsi itu. Adakah perisian tersebut dapat membezakan kedua-dua graf itu? Jelaskan jawapan anda.

Contoh 2

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^2}$, $x \neq 0$. Berdasarkan graf, cari

(a) $f(0)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



Penyelesaian

(a) Didapati bahawa tiada titik di $x = 0$. Maka, $f(0)$ tidak tertakrif di $x = 0$.

(b) Apabila $x \to 0$ sama ada dari arah kiri atau kanan, $f(x) \to -1$. Maka, $\underset{x \to 0}{\text{had}}\, f(x) = -1$.

(c) Apabila $x \to 2$ sama ada dari arah kiri atau kanan, $f(x) \to 3$. Maka, $\underset{x \to 2}{\text{had}}\, f(x) = 3$.

Latihan Kendiri 2.1

1. Cari had bagi setiap fungsi yang berikut apabila $x \to 0$.

(a) $x^2 + x - 3$ (b) $\sqrt{x + 1}$ (c) $\dfrac{x + 4}{x - 2}$ (d) $\dfrac{a}{ax + a}$

2. Tentukan had bagi setiap fungsi yang berikut.

(a) $\underset{x \to 0}{\text{had}}\, (3x - 1)$ (b) $\underset{x \to -3}{\text{had}}\, \sqrt{10 - 2x}$ (c) $\underset{x \to -3}{\text{had}}\, \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

(d) $\underset{x \to 6}{\text{had}}\, \dfrac{x - 6}{x^2 - 36}$ (e) $\underset{x \to 2}{\text{had}}\, \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ (f) $\underset{x \to 0}{\text{had}}\, \dfrac{1 - \sqrt{2x + 1}}{2x^2 - x}$

(g) $\underset{x \to 4}{\text{had}}\, \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ (h) $\underset{x \to 3}{\text{had}}\, \dfrac{3 - \sqrt{2x + 3}}{x - 3}$ (i) $\underset{x \to -2}{\text{had}}\, \dfrac{x + 2}{\sqrt{5x + 14} - 2}$

3. Cari nilai bagi setiap had yang berikut.

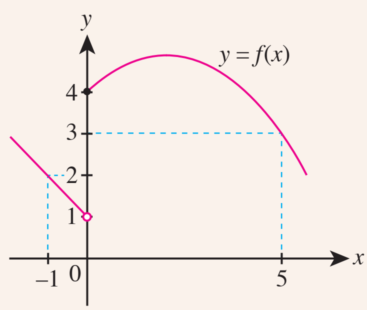
(a) $\underset{x \to 0}{\text{had}}\, \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 - 4x}$ (b) $\underset{x \to 3}{\text{had}}\, \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$ (c) $\underset{x \to 3}{\text{had}}\, \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 3x}$

(d) $\underset{x \to 0}{\text{had}}\, \dfrac{5x}{3 - \sqrt{x + 9}}$ (e) $\underset{x \to 4}{\text{had}}\, \dfrac{x - 4}{2 - \sqrt{8 - x}}$ (f) $\underset{x \to 7}{\text{had}}\, \dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf fungsi $y = f(x)$.

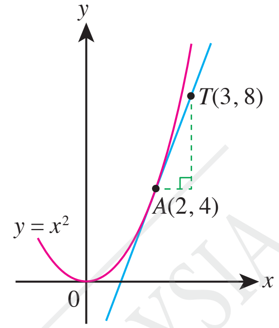
(a) Berdasarkan graf,
   (i) cari $f(0)$,
   (ii) tentukan sama ada $\underset{x \to 0}{\text{had}}\, f(x)$ wujud atau tidak. Jelaskan.

(b) Seterusnya, cari
   (i) $\underset{x \to -1}{\text{had}}\, f(x)$
   (ii) $\underset{x \to 5}{\text{had}}\, f(x)$



Terbitan pertama suatu fungsi $f(x)$ melalui pembezaan dengan prinsip pertama

Tangen kepada suatu lengkung di suatu titik ialah satu garis lurus yang menyentuh lengkung pada titik itu. Dalam rajah di sebelah, garis lurus AT dengan koordinat A dan T masing-masing ialah $(2, 4)$ dan $(3, 8)$ ialah tangen kepada lengkung $y = x^2$ di titik A.



$$\text{Kecerunan tangen } AT = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{3 - 2} = 4$$

Bagaimanakah cara untuk mencari kecerunan tangen bagi lengkung $y = x^2$ di titik yang lain pula, misalnya $B(3, 9)$?

Kecerunan bagi suatu lengkung menggunakan graf adalah sukar untuk ditentukan dan hasilnya tidak begitu tepat. Terdapat kaedah lain yang boleh digunakan untuk mencari kecerunan bagi suatu lengkung pada titik tertentu, iaitu dengan menggunakan idea had seperti dalam penerokaan berikut.

Sudut Informasi

Kecerunan lengkung juga dikenali sebagai kecerunan tangen.

Aktiviti Penerokaan 2

Berkumpulan PAK-21 STEM PK

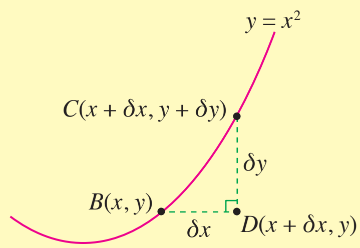
Tujuan: Meneroka fungsi kecerunan tangen dan kecerunan tangen kepada lengkung $y = x^2$ pada titik $B(3, 9)$ dengan menggunakan idea had

ggbm.at/z7kumqkk

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf $y = x^2$ dan garis lurus yang melalui titik $B(3, 9)$ dan titik $C(4, 16)$ pada graf tersebut.
3. Nilai $m = 7$ mewakili kecerunan bagi garis lurus BC.
4. Gerakkan titik C menghampiri titik B dan perhatikan perubahan pada nilai m.
5. Catatkan perubahan nilai m apabila titik C menghampiri titik B.
6. Katakan koordinat $B(3, 9)$ ialah (x, y) dan koordinat $C(4, 16)$ ialah $(x + \delta x, y + \delta y)$, dengan δx mewakili perubahan dalam nilai x dan δy mewakili perubahan dalam nilai y. Salin dan lengkapkan jadual berikut.

δx	$x + \delta x$	$y + \delta y$	δy	$\dfrac{\delta y}{\delta x}$
1	4	16	7	7
0.5	3.5	12.25	3.25	
0.05				
0.005				

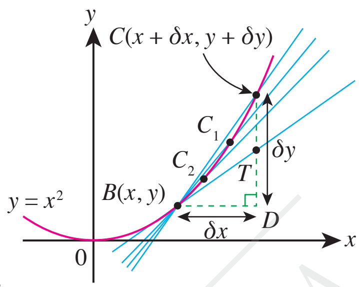


7. Apabila δx menghampiri 0, apakah yang berlaku pada nilai $\dfrac{\delta y}{\delta x}$? Bandingkan keputusannya dengan keputusan yang diperoleh dalam langkah 5.

Daripada Aktiviti Penerokaan 2, perhatikan bahawa $B(x, y)$ dan $C(x + \delta x, y + \delta y)$ ialah dua titik berhampiran pada lengkung $y = x^2$.

Jadi,

$$\text{Kecerunan garis lurus } BC = \frac{CD}{BD} = \frac{(y + \delta y) - y}{(x + \delta x) - x} = \frac{\delta y}{\delta x}$$



Apabila titik C menghampiri titik B di sepanjang lengkung, garis lurus BC berubah dan menjadi BC_1, seterusnya menjadi BC_2, iaitu nilai bagi δx semakin kecil dan menghampiri sifar, $\delta x \to 0$. Apabila titik C berada di atas titik B, garis lurus menjadi tangen di titik B. Oleh itu,

$$\text{Kecerunan lengkung di } B = \text{Kecerunan tangen } BT = \text{Nilai bagi } \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}$$

Maka, bagi lengkung $y = f(x)$, fungsi kecerunan tangennya pada sebarang titik boleh ditentukan dengan mencari $\underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}$. $\underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}$ disebut sebagai terbitan pertama bagi fungsi terhadap x dan ditandakan dengan simbol $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Fungsi kecerunan tangen $\frac{dy}{dx}$ ini boleh digunakan untuk mencari kecerunan tangen kepada suatu lengkung $y = f(x)$ pada sebarang titik $(x, f(x))$.

Misalnya, pertimbangkan semula lengkung $y = f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}
\delta y &= f(x + \delta x) - f(x) \\
&= (x + \delta x)^2 - x^2 \\
&= x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2 - x^2 \\
&= 2x(\delta x) + (\delta x)^2 \\
\frac{\delta y}{\delta x} &= \frac{2x(\delta x) + (\delta x)^2}{\delta x} \\
&= 2x + \delta x
\end{aligned}$$

Bahagikan kedua-dua belah persamaan dengan δx

Maka,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x} \\
&= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} (2x + \delta x) \\
&= 2x + 0 \\
\frac{dy}{dx} &= 2x
\end{aligned}$$

Fungsi kecerunan tangen

GALERI SEJARAH

Konsep had bagi suatu fungsi mula diperkenalkan secara eksplisit oleh Sir Isaac Newton. Beliau menyatakan bahawa had ialah konsep asas dalam kalkulus dan menjelaskan konsep utama had ialah "mendekati dengan lebih dekat daripada sebarang perbezaan yang diberikan".

Sudut Informasi

- Simbol δx dibaca sebagai "delta x" yang mewakili tokokan kecil dalam x.
- Simbol δy dibaca sebagai "delta y" yang mewakili tokokan kecil dalam y.

Tip Pintar

$\frac{dy}{dx}$ bukan bermaksud dy bahagi dengan dx tetapi $\frac{dy}{dx}$ ialah simbol bagi had $\frac{\delta y}{\delta x}$ apabila $\delta x \to 0$.

Jadi, kecerunan tangen kepada lengkung $y = x^2$ pada titik $B(3, 9)$ ialah $\frac{dy}{dx} = 2x = 2(3) = 6$.

Secara amnya, proses untuk menentukan fungsi kecerunan $\frac{dy}{dx}$ atau terbitan pertama bagi suatu fungsi $y = f(x)$ dengan menggunakan idea $\underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}$ seperti ini disebut sebagai **pembezaan dengan prinsip pertama**.

Contoh 3

Cari $\frac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama bagi setiap fungsi $y = f(x)$ yang berikut.

(a) $y = 3x$ (b) $y = 3x^2$ (c) $y = 3x^3$

Penyelesaian

(a) Diberi $y = f(x) = 3x$

$$\begin{aligned}\delta y &= f(x + \delta x) - f(x)\\ &= 3(x + \delta x) - 3x\\ &= 3x + 3\delta x - 3x\\ &= 3\delta x\\ \frac{\delta y}{\delta x} &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}\\ &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}}\ 3\\ \frac{dy}{dx} &= 3\end{aligned}$$

(b) Diberi $y = f(x) = 3x^2$

$$\begin{aligned}\delta y &= f(x + \delta x) - f(x)\\ &= 3(x + \delta x)^2 - 3x^2\\ &= 3[x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2] - 3x^2\\ &= 3x^2 + 6x(\delta x) + 3(\delta x)^2 - 3x^2\\ &= 6x(\delta x) + 3(\delta x)^2\\ \frac{\delta y}{\delta x} &= 6x + 3\delta x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}\\ &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}}\ (6x + 3\delta x)\\ &= 6x + 3(0)\\ \frac{dy}{dx} &= 6x\end{aligned}$$

(c) Diberi $y = f(x) = 3x^3$

$$\begin{aligned}\delta y &= f(x + \delta x) - f(x)\\ &= 3(x + \delta x)^3 - 3x^3\\ &= 3(x + \delta x)(x + \delta x)^2 - 3x^3\\ &= 3(x + \delta x)[x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2] - 3x^3\\ &= 3[x^3 + 2x^2(\delta x) + x(\delta x)^2 + x^2(\delta x) + 2x(\delta x)^2 + (\delta x)^3] - 3x^3\\ &= 3[x^3 + 3x^2(\delta x) + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3] - 3x^3\\ &= 3x^3 + 9x^2(\delta x) + 9x(\delta x)^2 + 3(\delta x)^3 - 3x^3\\ &= 9x^2(\delta x) + 9x(\delta x)^2 + 3(\delta x)^3\\ \frac{\delta y}{\delta x} &= 9x^2 + 9x(\delta x) + 3(\delta x)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Maka, } \frac{dy}{dx} &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \frac{\delta y}{\delta x}\\ &= \underset{\delta x \to 0}{\text{had}}\ [9x^2 + 9x(\delta x) + 3(\delta x)^2]\\ &= 9x^2 + 9x(0) + 3(0)^2\\ \frac{dy}{dx} &= 9x^2\end{aligned}$$

Tip Pintar

Langkah-langkah untuk menentukan $\frac{dy}{dx}$ bagi sebarang fungsi $f(x)$ dengan prinsip pertama.

1. Pertimbangkan dua titik $A(x, y)$ dan $B(x + \delta x, y + \delta y)$ pada lengkung.
2. Tentukan δy dengan $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$.
3. Dapatkan nisbah $\frac{\delta y}{\delta x}$.
4. Ambil had bagi $\frac{\delta y}{\delta x}$ apabila $\delta x \to 0$.

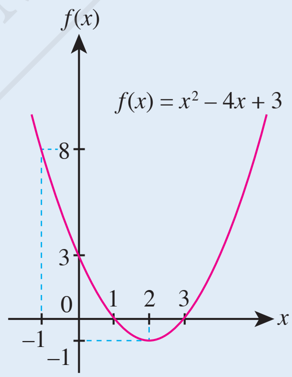
Latihan Kendiri 2.2

1. Cari $\dfrac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama bagi setiap fungsi $y = f(x)$ yang berikut.
   (a) $y = x$ (b) $y = 5x$ (c) $y = -4x$ (d) $y = 6x^2$
   (e) $y = -x^2$ (f) $y = 2x^3$ (g) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ (h) $y = \dfrac{1}{x}$
2. Diberi $y = 2x^2 - x + 7$, cari $\dfrac{dy}{dx}$ dengan menggunakan prinsip pertama.
3. Dengan menggunakan prinsip pertama, cari fungsi kecerunan bagi lengkung $y = 3 + x - x^2$.

Latihan Formatif 2.1

Kuiz bit.ly/36ml2zn

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada graf $f(x) = x^2 - 4x + 3$.



   (a) Daripada graf, cari setiap yang berikut.
   (i) $\displaystyle\lim_{x \to -1} f(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ (iii) $\displaystyle\lim_{x \to 1} f(x)$
   (iv) $\displaystyle\lim_{x \to 2} f(x)$ (v) $\displaystyle\lim_{x \to 3} f(x)$ (vi) $\displaystyle\lim_{x \to 4} f(x)$

   (Dalam buku: "had" digunakan bagi lim.)

   (b) Cari nilai-nilai yang mungkin bagi a jika $\displaystyle\text{had}_{x \to a} f(x) = 8$.
   (c) (i) Tentukan fungsi kecerunan tangen, $\dfrac{dy}{dx}$ bagi graf itu dengan menggunakan prinsip pertama.
   (ii) Seterusnya, tentukan kecerunan tangen pada titik (4, 3).
2. Cari nilai bagi setiap had yang berikut.
   (a) $\displaystyle\underset{x \to 0}{\text{had}}\,(x^2 - 6x + 9)$ (b) $\displaystyle\underset{x \to 2}{\text{had}}\,\sqrt[3]{x^4 - 2x^2}$ (c) $\displaystyle\underset{x \to 9}{\text{had}}\,\frac{9 - x}{x^2 - 81}$
   (d) $\displaystyle\underset{x \to 2}{\text{had}}\,\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (e) $\displaystyle\underset{x \to 1}{\text{had}}\,\frac{x^3 - x}{x - 1}$ (f) $\displaystyle\underset{x \to 5}{\text{had}}\,\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25}$
3. Tentukan nilai had bagi setiap fungsi yang berikut.
   (a) $\displaystyle\underset{x \to 0}{\text{had}}\,\frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 2x}}{x}$ (b) $\displaystyle\underset{x \to 4}{\text{had}}\,\frac{3 - \sqrt{x + 5}}{x - 4}$ (c) $\displaystyle\underset{x \to 3}{\text{had}}\,\frac{x^2 - 5x + 6}{2 - \sqrt{x + 1}}$
4. (a) Diberi bahawa $\displaystyle\underset{x \to 2}{\text{had}}\,\frac{x^2 - k}{3x - 6} = \frac{4}{3}$, cari nilai k.
   (b) Jika $\displaystyle\underset{x \to -1}{\text{had}}\,\frac{x^2 - 2x - h}{kx + 2} = -2$, cari nilai bagi $h + k$.
5. Bezakan fungsi berikut terhadap x dengan menggunakan prinsip pertama.
   (a) $y = 5x - 8$ (b) $y = x^2 - x$ (c) $y = (x + 1)^2$ (d) $y = \dfrac{1}{4x}$
6. Sesaran, s m, bagi seekor tupai yang berlari pada kabel lurus selepas t saat diberi oleh $s(t) = t^2 - 3t$, dengan keadaan $t \geqslant 0$. Menggunakan prinsip pertama, cari halaju tupai itu apabila $t = 5$.

2.1.2

2.2 Pembezaan Peringkat Pertama

Rumus terbitan pertama bagi fungsi $y = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer

Perhatikan semula Contoh 3 pada halaman 36. Terbitan pertama bagi fungsi $y = 3x$, $y = 3x^2$ dan $y = 3x^3$ dengan prinsip pertama adalah mengikut pola seperti dalam jadual di sebelah.

Fungsi	$\dfrac{dy}{dx}$	Pola
$y = 3x$	3	$3(1x^{1-1})$
$y = 3x^2$	$6x$	$3(2x^{2-1})$
$y = 3x^3$	$9x^2$	$3(3x^{3-1})$

Daripada pola yang diperoleh, bagi fungsi $y = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer, kita boleh menerbitkan rumus terbitan pertama bagi fungsi itu secara induktif seperti yang berikut.

$$\text{Jika } y = ax^n\text{, maka } \frac{dy}{dx} = anx^{n-1} \text{ atau } \frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$$

Tip Pintar

Bagi $y = ax^n$,
- Jika $n = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = a$
- Jika $n = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 0$

Tiga tatatanda yang boleh digunakan untuk menerangkan terbitan pertama suatu fungsi $y = ax^n$ adalah seperti yang berikut.

1	Jika $y = 3x^2$, maka $\dfrac{dy}{dx} = 6x$	$\dfrac{dy}{dx}$ disebut sebagai pembezaan y terhadap x.
2	Jika $f(x) = 3x^2$, maka $f'(x) = 6x$	$f'(x)$ dikenali sebagai fungsi kecerunan bagi lengkung $y = f(x)$ kerana fungsi ini boleh digunakan untuk mencari kecerunan lengkung pada sebarang titik.
3	$\dfrac{d}{dx}(3x^2) = 6x$	Jika bezakan $3x^2$ terhadap x, hasilnya ialah $6x$.

Menentukan terbitan pertama bagi suatu fungsi algebra

Ikuti penerokaan berikut untuk melihat perbandingan antara graf fungsi $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$ menggunakan perisian geometri dinamik Desmos.

Aktiviti Penerokaan 3 Berkumpulan STEM PK

Tujuan: Membandingkan graf fungsi $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf $f(x) = x^2$ yang terpapar pada satah.
3. Klik butang $(a, f(a))$ untuk melihat koordinat titik sentuh antara graf $f(x)$ dengan garis tangennya.
4. Kemudian, klik butang $f'(x) = \dfrac{d}{dx}[f(x)]$ untuk melihat graf $f'(x)$, iaitu graf fungsi kecerunan bagi $f(x)$. Seterusnya, klik butang $(a, f'(a))$ untuk melihat koordinat titik pada graf $f'(x)$.

bit.ly/2Foq2bu

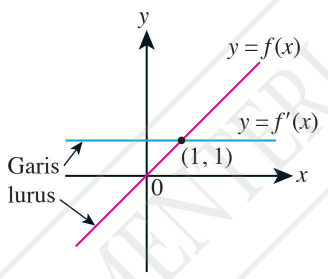
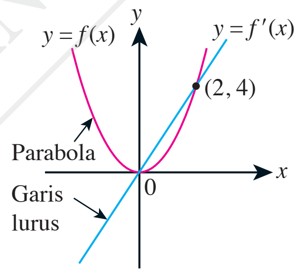
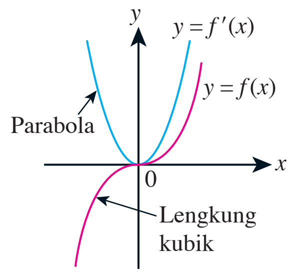
5. Seret gelongsor a untuk mengubah titik sentuh antara lengkung $f(x)$ dengan garis tangennya.
6. Bandingkan graf fungsi $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$. Apakah yang anda boleh katakan tentang kedua-dua graf ini apabila nilai a berubah?
7. Salin dan lengkapkan jadual di bawah untuk mencari kecerunan lengkung $y = x^2$ pada koordinat-x yang diberi. Kecerunan lengkung boleh diperoleh dengan melihat koordinat-y pada titik di graf $f'(x)$.

Koordinat-x	-3	-2	-1	0	1	2	3
Kecerunan lengkung							

8. Dengan menggunakan rumus terbitan pertama yang telah dipelajari, tentukan fungsi $f'(x)$. Seterusnya, gantikan nilai-nilai koordinat-x daripada jadual di atas ke dalam fungsi $f'(x)$ untuk menyemak dan mengesahkan kecerunan lengkung yang diperoleh dalam langkah 7.
9. Teruskan penerokaan anda dengan fungsi yang lain seperti fungsi kubik, seterusnya bandingkan jenis serta bentuk graf fungsi itu dengan graf fungsi kecerunannya.
10. Buat satu kesimpulan berdasarkan hasil dapatan anda.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 3, didapati bahawa:

- Perbandingan antara graf $f(x)$ dengan graf fungsi kecerunannya, $f'(x)$ bagi tiga fungsi polinomial dalam bentuk $y = f(x) = ax^n$, dengan $a = 1$ dan kuasa tertinggi polinomial, $n = 1$, 2 dan 3 dapat dirumuskan seperti berikut.

Graf $y = f(x) = x$ dan $y = f'(x) = 1$	**Graf $y = f(x) = x^2$ dan $y = f'(x) = 2x$**	**Graf $y = f(x) = x^3$ dan $y = f'(x) = 3x^2$**
		

- Langkah-langkah untuk menentukan kecerunan bagi lengkung $f(x)$ pada suatu titik pula adalah seperti berikut.

Cari fungsi kecerunan $f'(x)$ bagi fungsi $f(x) = ax^n$ terlebih dahulu dengan menggunakan rumus berikut:

Jika $f(x) = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer, maka $f'(x) = anx^{n-1}$.

→

Gantikan nilai x ke dalam fungsi kecerunan itu.

Proses untuk menentukan fungsi kecerunan $f'(x)$ bagi suatu fungsi $y = f(x)$ disebut sebagai **pembezaan**. Fungsi kecerunan juga dikenali sebagai **terbitan pertama bagi suatu fungsi** atau **fungsi terbitan** atau **pekali pembezaan y terhadap x**.

Contoh 4

Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $-\frac{2}{3}x^6$ (b) $y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$ (c) $f(x) = \frac{3}{8x^2}$

Penyelesaian

(a)
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}x^6\right) = -\frac{2}{3}(6x^{6-1})$$
$$= -\frac{2}{3}(6x^5)$$
$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{3}x^6\right) = -4x^5$$

(b)
$$y = \frac{1}{5}\sqrt{x}$$
$$= \frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right)$$
$$= \frac{1}{10}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10\sqrt{x}}$$

(c)
$$f(x) = \frac{3}{8x^2}$$
$$= \frac{3}{8}x^{-2}$$
$$f'(x) = \frac{3}{8}(-2x^{-2-1})$$
$$= -\frac{3}{4}x^{-3}$$
$$f'(x) = -\frac{3}{4x^3}$$

Contoh 5

(a) Jika $f(x) = \frac{3}{4}x^4$, cari $f'(-1)$ dan $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

(b) Diberi bahawa $y = 9\sqrt[3]{x}$, cari nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 8$.

Penyelesaian

(a)
$$f(x) = \frac{3}{4}x^4$$
$$f'(x) = \frac{3}{4}(4x^{4-1})$$
$$= 3x^3$$
$$f'(-1) = 3(-1)^3$$
$$= -3$$
$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3$$
$$= \frac{1}{9}$$

(b)
$$y = 9\sqrt[3]{x}$$
$$= 9x^{\frac{1}{3}}$$
$$\frac{dy}{dx} = 9\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right)$$
$$= 3x^{-\frac{2}{3}}$$
Apabila $x = 8$, $\frac{dy}{dx} = 3(8)^{-\frac{2}{3}}$
$$= \frac{3}{4}$$

Sudut Informasi

Fungsi kecerunan bagi suatu lengkung ialah suatu fungsi manakala kecerunan bagi suatu lengkung pada titik tertentu pula ialah suatu nilai berangka.

Misalnya, bagi lengkung $y = 2x^3$, fungsi kecerunannya ialah $\frac{dy}{dx} = 2(3x^{3-1}) = 6x^2$ dan kecerunannya pada titik $(1, 2)$ ialah $\frac{dy}{dx} = 6(1)^2 = 6$.

Terbitan bagi suatu fungsi yang melibatkan penambahan atau penolakan sebutan-sebutan algebra pula boleh diperoleh dengan membezakan fungsi itu sebutan demi sebutan secara berasingan.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ ialah suatu fungsi, maka

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Contoh 6

Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $5x^3 + \frac{3}{4}x^4$ (b) $x(\sqrt{x} - 9)$ (c) $\frac{(2x + 1)(x - 1)}{x}$

Penyelesaian

(a) $\frac{d}{dx}\left(5x^3 + \frac{3}{4}x^4\right) = \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}x^4\right)$ ← Bezakan setiap sebutan secara berasingan

$= 5(3x^{3-1}) + \frac{3}{4}\left(4x^{4-1}\right)$

$\frac{d}{dx}\left(5x^3 + \frac{3}{4}x^4\right) = 15x^2 + 3x^3$

(b) Katakan $f(x) = x(\sqrt{x} - 9)$

$= x^{\frac{3}{2}} - 9x$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} - 9(1x^{1-1})$ ← Bezakan setiap sebutan secara berasingan

$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 9$

$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 9$

(c) Katakan $y = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x}$

$= \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

$= 2x - 1 - x^{-1}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}(x^{-1})$ ← Bezakan setiap sebutan secara berasingan

$= 2x^{1-1} - 0x^{0-1} - (-1x^{-1-1})$

$= 2 + x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = 2 + \frac{1}{x^2}$

Latihan Kendiri 2.3

1. Cari terbitan pertama bagi setiap fungsi yang berikut terhadap x.

(a) $\frac{4}{5}x^{10}$ (b) $-2x^4$ (c) $\frac{3}{4x^8}$ (d) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ (e) $-12\sqrt[3]{x^2}$

2. Bezakan setiap fungsi yang berikut terhadap x.

(a) $4x^2 + 6x - 1$ (b) $\frac{4}{5}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ (c) $(9 - 4x)^2$

3. Bezakan setiap fungsi yang berikut terhadap x.

(a) $y = 4x^2(5 - \sqrt{x})$ (b) $y = \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^2$ (c) $y = \frac{(4x - 1)(1 - x)}{\sqrt{x}}$

4. Cari nilai $\frac{dy}{dx}$ pada setiap nilai x yang diberi.

(a) $y = x^2 - 2x, x = \frac{1}{2}$ (b) $y = \sqrt{x}(2 - x), x = 9$ (c) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2}, x = 2$

Terbitan pertama fungsi gubahan

Untuk membezakan fungsi $y = (2x + 3)^2$, kita kembangkan fungsi itu kepada $y = 4x^2 + 12x + 9$ terlebih dahulu sebelum membezakannya sebutan demi sebutan untuk memperoleh $\frac{dy}{dx} = 8x + 12$.

Bagaimanakah pula jika kita ingin membezakan fungsi $y = (2x + 3)^4$? Ungkapan $(2x + 3)^4$ adalah sangat rumit untuk dikembangkan melainkan jika kita pertimbangkan suatu fungsi sebagai gubahan bagi dua fungsi yang mudah. Mari teroka kaedah tersebut.

Aktiviti Penerokaan 4

Individu

Tujuan: Meneroka kaedah yang berlainan untuk membezakan suatu fungsi dalam bentuk $y = (ax + b)^n$, dengan keadaan $a \neq 0$

Langkah:

1. Pertimbangkan fungsi $y = (2x + 3)^2$.
2. Kembangkan ungkapan $(2x + 3)^2$ dan tentukan $\frac{dy}{dx}$ dengan membezakannya sebutan demi sebutan secara berasingan.
3. Jika $u = 2x + 3$,
   (a) ungkapkan y sebagai fungsi bagi u,
   (b) cari $\frac{du}{dx}$ dan $\frac{dy}{du}$,
   (c) tentukan $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ dalam sebutan x dan ringkaskan jawapan anda.
4. Bandingkan kaedah yang digunakan dalam langkah 2 dan 3. Adakah jawapannya sama? Kaedah manakah yang menjadi pilihan anda? Berikan sebab.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 4, didapati bahawa terdapat pelbagai cara untuk membezakan suatu fungsi seperti $y = (2x + 3)^2$. Namun, kaedah seperti yang ditunjukkan dalam langkah 3 adalah lebih mudah digunakan untuk memperoleh terbitan bagi suatu ungkapan dalam bentuk $(ax + b)^n$, dengan keadaan $a \neq 0$, yang sukar untuk dikembangkan.

Bagi fungsi $y = f(x) = (2x + 3)^2$:
Katakan, $u = h(x) = 2x + 3$
Jadi, $y = g(u) = u^2$

Dalam hal ini, y sebagai fungsi bagi u dan u sebagai fungsi bagi x. Jadi, kita katakan bahawa $y = f(x)$ ialah fungsi gubahan bagi $y = g(u)$ dan $u = h(x)$.

Untuk membezakan fungsi seperti ini, kita perkenalkan satu kaedah mudah yang dikenali sebagai **petua rantai**, iaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Akses QR

Pembuktian petua rantai dengan menggunakan idea had.

bit.ly/2t6tiW2

Sudut Informasi

Ungkapan $(2x + 3)^4$ boleh dikembangkan dengan menggunakan teorem Binomial.

Secara amnya, terbitan pertama bagi suatu fungsi gubahan adalah seperti berikut:

Jika $y = g(u)$ dan $u = h(x)$, maka pembezaan y terhadap x diberi oleh

$$f'(x) = g'(u) \times h'(x)$$

iaitu, $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Contoh 7

Bezakan setiap fungsi berikut terhadap x.

(a) $y = (3x^2 - 4x)^7$ (b) $y = \dfrac{1}{(2x + 3)^3}$ (c) $y = \sqrt{6x^2 + 8}$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 3x^2 - 4x$ dan $y = u^7$

Jadi, $\dfrac{du}{dx} = 6x - 4$ dan $\dfrac{dy}{du} = 7u^6$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}\\ &= 7u^6(6x - 4)\\ &= 7(3x^2 - 4x)^6(6x - 4)\\ &= (42x - 28)(3x^2 - 4x)^6\\ \frac{dy}{dx} &= 14(3x - 2)(3x^2 - 4x)^6\end{aligned}$$

(b) Katakan $u = 2x + 3$ dan $y = \dfrac{1}{u^3} = u^{-3}$

Jadi, $\dfrac{du}{dx} = 2$ dan $\dfrac{dy}{du} = -3u^{-3-1} = -\dfrac{3}{u^4}$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}\\ &= -\frac{3}{u^4}(2)\\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{6}{(2x + 3)^4}\end{aligned}$$

(c) Katakan $u = 6x^2 + 8$ dan $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$

Jadi, $\dfrac{du}{dx} = 12x$ dan $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$

Dengan petua rantai,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}}(12x)\\ &= \frac{12x}{2\sqrt{6x^2 + 8}}\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{6x}{\sqrt{6x^2 + 8}}\end{aligned}$$

Sudut Informasi

Secara amnya, bagi fungsi dalam bentuk $y = u^n$, dengan u ialah fungsi bagi x, maka $\dfrac{dy}{du} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$ atau $\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$.

Rumus ini boleh digunakan untuk mendapatkan pembezaan fungsi dalam Contoh 7 secara langsung.

Latihan Kendiri 2.4

1. Bezakan setiap ungkapan berikut terhadap x.

(a) $(x + 4)^5$ (b) $(2x - 3)^4$ (c) $\dfrac{1}{3}(6 - 3x)^6$ (d) $(4x^2 - 5)^7$

(e) $\left(\dfrac{1}{6}x + 2\right)^8$ (f) $\dfrac{2}{3}(5 - 2x)^9$ (g) $(1 - x - x^2)^3$ (h) $(2x^3 - 4x + 1)^{-10}$

2. Bezakan setiap ungkapan berikut terhadap x.

(a) $\dfrac{1}{3x+2}$ (b) $\dfrac{1}{(2x-7)^3}$ (c) $\dfrac{5}{(3-4x)^5}$ (d) $\dfrac{3}{4(5x-6)^8}$

(e) $\sqrt{2x-7}$ (f) $\sqrt{6-3x}$ (g) $\sqrt{3x^2+5}$ (h) $\sqrt{x^2-x+1}$

3. Cari nilai bagi $\dfrac{dy}{dx}$ pada setiap nilai x atau nilai y yang diberi berikut.

(a) $y = (2x+5)^4$, $x = 1$ (b) $y = \sqrt{5-2x}$, $x = \dfrac{1}{2}$ (c) $y = \dfrac{1}{2x-3}$, $y = 1$

Terbitan pertama bagi suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dan hasil bahagi ungkapan algebra

Aktiviti Penerokaan 5 — Individu

Tujuan: Meneroka dua kaedah berlainan untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dua ungkapan algebra

Langkah:

1. Pertimbangkan fungsi $y = (x^2+1)(x-4)^2$.
2. Kembangkan ungkapan $(x^2+1)(x-4)^2$ dan tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dengan membezakan setiap sebutan secara berasingan.
3. Jika $u = x^2+1$ dan $v = (x-4)^2$, cari
   (a) $\dfrac{du}{dx}$ dan $\dfrac{dv}{dx}$,
   (b) $u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ dalam sebutan x.
4. Bandingkan dua kaedah yang digunakan dalam langkah 2 dan 3. Adakah jawapannya sama? Kaedah manakah yang menjadi pilihan anda? Jelaskan.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 5, didapati bahawa terdapat lebih daripada satu cara untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dua ungkapan algebra seperti fungsi $y = (x^2+1)(x-4)^2$. Namun, bagi dua ungkapan algebra yang tidak boleh dikembangkan seperti $(x^2+1)\sqrt{x-4}$, **petua hasil darab** seperti dalam langkah 3 ialah kaedah yang sesuai dan sering digunakan untuk melakukan pembezaan.

Secara amnya, rumus terbitan pertama bagi suatu fungsi yang melibatkan hasil darab dua ungkapan algebra, juga dikenali sebagai petua hasil darab adalah seperti berikut:

> Jika u dan v ialah suatu fungsi bagi x, maka
> $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Akses QR

Pembuktian petua hasil darab dengan menggunakan idea had.

bit.ly/2rCVm2G

Tip Pintar

$$\frac{d}{dx}(uv) \neq \frac{du}{dx} \times \frac{dv}{dx}$$

Aktiviti Penerokaan 6 Individu

Tujuan: Meneroka dua kaedah berlainan untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil bahagi dua ungkapan algebra

Langkah:

1. Pertimbangkan fungsi $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.
2. Tulis semula fungsi $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ sebagai $y = x(x-1)^{-2}$ dan tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dengan menggunakan petua hasil darab.
3. Jika $u = x$ dan $v = (x-1)^2$, cari
   (a) $\dfrac{du}{dx}$ dan $\dfrac{dv}{dx}$,
   (b) $\dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ dalam sebutan x.
4. Bandingkan kaedah yang digunakan dalam langkah 2 dan 3. Adakah anda memperoleh jawapan yang sama?
5. Kemudian, nyatakan kaedah yang menjadi pilihan anda. Berikan sebab.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 6, didapati bahawa selain daripada menggunakan petua hasil darab untuk membezakan suatu fungsi yang melibatkan hasil bahagi dua ungkapan algebra seperti $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, kita boleh membezakannya secara langsung dengan menggunakan **petua hasil bahagi** seperti dalam langkah 3.

Secara amnya, petua hasil bahagi adalah seperti berikut:

> Jika u dan v ialah fungsi bagi x dan $v(x) \neq 0$, maka
> $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

PERBINCANGAN

Dengan menggunakan idea had, buktikan petua hasil bahagi.

Tip Pintar

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) \neq \frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{dv}{dx}}$$

Contoh 8

Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $(x^2 + 1)(x - 3)^4$ (b) $(3x + 2)\sqrt{4x - 1}$

Penyelesaian

(a) Diberi $y = (x^2 + 1)(x - 3)^4$.
Jadi, $u = x^2 + 1$
dan $v = (x - 3)^4$

Kita peroleh, $\dfrac{du}{dx} = 2x$

dan $\dfrac{dv}{dx} = 4(x-3)^{4-1}\dfrac{d}{dx}(x-3)$
$= 4(x-3)^3$

Sudut Informasi

Petua hasil darab dan petua hasil bahagi masing-masing boleh ditulis seperti yang berikut.

- $\dfrac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

dengan u dan v masing-masing ialah fungsi bagi x.

2.2.4

Maka, $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$= (x^2 + 1) \times 4(x - 3)^3 + (x - 3)^4 \times 2x$

$= 4(x^2 + 1)(x - 3)^3 + 2x(x - 3)^4$

$= 2(x - 3)^3[2(x^2 + 1) + x(x - 3)]$

$\dfrac{dy}{dx} = 2(x - 3)^3(3x^2 - 3x + 2)$

(b) Diberi $y = (3x + 2)\sqrt{4x - 1}$.

Jadi, $u = 3x + 2$

dan $v = \sqrt{4x - 1} = (4x - 1)^{\frac{1}{2}}$

Kita peroleh, $\dfrac{du}{dx} = 3$

dan $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{2}(4x - 1)^{\frac{1}{2} - 1}\dfrac{d}{dx}(4x - 1)$

$= \dfrac{1}{2}(4x - 1)^{-\frac{1}{2}}(4)$

$= \dfrac{2}{\sqrt{4x - 1}}$

Maka, $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$= (3x + 2) \times \dfrac{2}{\sqrt{4x - 1}} + \sqrt{4x - 1} \times 3$

$= \dfrac{2(3x + 2)}{\sqrt{4x - 1}} + 3\sqrt{4x - 1}$

$= \dfrac{2(3x + 2) + 3(4x - 1)}{\sqrt{4x - 1}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{18x + 1}{\sqrt{4x - 1}}$

PERBINCANGAN

1. Bezakan $x(1 - x^2)^2$ terhadap x dengan menggunakan dua kaedah yang berbeza. Adakah anda memperoleh jawapan yang sama?
2. Diberi $y = 3(2x - 1)^4$, cari $\dfrac{dy}{dx}$ dengan menggunakan
   (a) petua rantai,
   (b) petua hasil darab.
   Petua manakah yang menjadi pilihan anda?

Akses QR

Semak jawapan dalam Contoh 8 dengan menggunakan kalkulator petua hasil darab.

ggbm.at/CHfcruJC

Contoh 9

Diberi $y = x\sqrt{x + 3}$, cari

(a) ungkapan bagi $\dfrac{dy}{dx}$

(b) kecerunan tangen pada $x = 6$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = x$ dan $v = \sqrt{x + 3}$.

Jadi, $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x + 3}\right) + \sqrt{x + 3}\,\dfrac{d}{dx}(x)$

$= x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}}\right) + \sqrt{x + 3}$

$= \dfrac{x + 2(x + 3)}{2\sqrt{x + 3}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(x + 2)}{2\sqrt{x + 3}}$

(b) Apabila $x = 6$,

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(6 + 2)}{2\sqrt{6 + 3}}$

$= \dfrac{24}{6}$

$= 4$

Maka, kecerunan tangen pada $x = 6$ ialah 4.

Contoh 10

(a) Diberi $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3}$, cari $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Diberi $y = \dfrac{x}{\sqrt{4x - 1}}$, tunjukkan bahawa $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{(4x - 1)^3}}$.

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 2x + 1$ dan $v = x^2 - 3$.

Jadi, $\dfrac{du}{dx} = 2$ dan $\dfrac{dv}{dx} = 2x$

$$\text{Maka, } \frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$
$$= \frac{(x^2 - 3)(2) - (2x + 1)(2x)}{(x^2 - 3)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 6 - (4x^2 + 2x)}{(x^2 - 3)^2}$$
$$= \frac{-2x^2 - 2x - 6}{(x^2 - 3)^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x^2 + x + 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

(b)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4x - 1}\dfrac{d}{dx}(x) - x\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{4x - 1}\right)}{\left(\sqrt{4x - 1}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{4x - 1} - \dfrac{2x}{\sqrt{4x - 1}}}{4x - 1}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{4x - 1}\right)\left(\sqrt{4x - 1}\right) - 2x}{(4x - 1)\sqrt{4x - 1}}$$
$$= \frac{4x - 1 - 2x}{(4x - 1)\left(\sqrt{4x - 1}\right)}$$
$$= \frac{2x - 1}{(4x - 1)\left(\sqrt{4x - 1}\right)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 1}{\sqrt{(4x - 1)^3}}$$

Latihan Kendiri 2.5

1. Cari $\dfrac{dy}{dx}$ bagi setiap fungsi berikut.

(a) $y = 4x^2(5x + 3)$ (b) $y = -2x^3(x + 1)$ (c) $y = x^2(1 - 4x)^4$

(d) $y = x^2\sqrt{1 - 2x^2}$ (e) $y = (4x - 3)(2x + 7)^6$ (f) $y = (x + 5)^3(x - 4)^4$

2. Bezakan setiap yang berikut terhadap x dengan menggunakan petua hasil darab.

(a) $(1 - x^2)(6x + 1)$ (b) $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$ (c) $(x^3 - 5)(x^2 - 2x + 8)$

3. Diberi $f(x) = x\sqrt{x - 1}$, cari nilai bagi $f'(5)$.

4. Cari kecerunan tangen bagi lengkung $y = x\sqrt{x^2 + 9}$ di $x = 4$.

5. Bezakan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $\dfrac{3}{2x - 7}$ (b) $\dfrac{3x}{4x + 6}$ (c) $\dfrac{4x^2}{1 - 6x}$ (d) $\dfrac{x^3 + 1}{2x - 1}$

(e) $\dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt{x - 1}}$ (g) $\dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^2 + 3}}$ (h) $\sqrt{\dfrac{4x + 1}{3x^2 - 7}}$

6. Cari nilai pemalar r dengan keadaan $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x - 3}{x + 5}\right) = \dfrac{r}{(x + 5)^2}$

2.2.4

Latihan Formatif 2.2

Kuiz bit.ly/2RHHFu2

1. Bezakan setiap yang berikut terhadap x.
   (a) $9x^2 - \dfrac{3}{x^2}$ (b) $\dfrac{6}{x^3} - \dfrac{1}{x} + 8$ (c) $5x + 4\sqrt{x} - 7$ (d) $\dfrac{10}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$
   (e) $\left(x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^2$ (f) $\dfrac{8x^2 + x}{\sqrt{x}}$ (g) $\dfrac{4}{9x^3} - \pi x + 6$ (h) $\sqrt{x}(2 - x)$

2. Jika $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}}$, cari nilai bagi $f'(8)$.

3. Diberi $f(t) = \dfrac{6t^3}{\sqrt[3]{t}}$,
   (a) permudahkan $f(t)$, (b) cari $f'(t)$, (c) cari nilai bagi $f'\left(\dfrac{1}{8}\right)$.

4. Diberi $s = 3t^2 + 5t - 7$, cari $\dfrac{ds}{dt}$ dan julat nilai t dengan keadaan $\dfrac{ds}{dt}$ adalah negatif.

5. Diberi $\dfrac{dy}{dx}$ bagi fungsi $y = ax^3 + bx^2 + 3$ pada titik $(1, 4)$ ialah 7, cari nilai a dan nilai b.

6. Cari koordinat titik pada fungsi $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ dengan keadaan $\dfrac{dy}{dx}$ ialah 3.

7. Diberi fungsi $h(x) = kx^3 - 4x^2 - 5x$, cari
   (a) $h'(x)$, dalam sebutan k, (b) nilai k jika $h'(1) = 8$.

8. Cari $\dfrac{dy}{dx}$ bagi setiap fungsi berikut.
   (a) $y = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{x}{6} - 1\right)^4$ (b) $y = \dfrac{1}{12}(10x - 3)^6$ (c) $y = \dfrac{8}{2 - 5x}$
   (d) $y = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^3$ (e) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3 - 9x}}$ (f) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 6}$

9. Jika $y = \dfrac{24}{(3x - 5)^2}$, cari nilai bagi $\dfrac{dy}{dx}$ apabila $x = 2$.

10. Cari nilai bagi pemalar a dan pemalar b dengan keadaan $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{(3x - 2)^3}\right) = -\dfrac{a}{(3x - 2)^b}$

11. Bezakan setiap yang berikut terhadap x.
    (a) $4x(2x - 1)^5$ (b) $x^4(3x + 1)^7$ (c) $x\sqrt{x + 3}$ (d) $(x + 7)^5(x - 5)^3$
    (e) $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ (f) $\dfrac{x}{\sqrt{4x + 1}}$ (g) $\dfrac{1}{x^2 + 2x + 7}$ (h) $\dfrac{1 - 2x^3}{x - 1}$

12. Tunjukkan bahawa jika $f(x) = x\sqrt{x^2 + 3}$, maka $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 3}}$

13. Diberi $y = \dfrac{4x - 3}{x^2 + 1}$, cari $\dfrac{dy}{dx}$ dan tentukan julat nilai x dengan keadaan semua nilai y dan $\dfrac{dy}{dx}$ adalah positif.

14. Diberi $y = \dfrac{x - 2}{x^2 + 5}$, cari julat nilai x dengan keadaan y dan $\dfrac{dy}{dx}$ adalah negatif.

2.3 Pembezaan Peringkat Kedua

Terbitan kedua bagi fungsi algebra

Pertimbangkan fungsi kubik $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

Fungsi kubik bagi x		Fungsi kuadratik bagi x
$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$	Pembezaan peringkat pertama →	$\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$

Perhatikan bahawa pembezaan suatu fungsi $y = f(x)$ terhadap x di atas menghasilkan suatu fungsi x yang lain. Fungsi $\dfrac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ ini dikenali sebagai terbitan pertama bagi fungsi $y = f(x)$ terhadap x. Bagaimana pula jika kita ingin membezakan $\dfrac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ terhadap x?

Apabila fungsi $\dfrac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ dibezakan terhadap x, kita peroleh $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ atau $\dfrac{d}{dx}[f'(x)]$. Fungsi ini ditulis sebagai $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ atau $f''(x)$ dan disebut sebagai **terbitan kedua** bagi fungsi $y = f(x)$ terhadap x. Secara amnya,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ atau } f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

Contoh 11

(a) Cari $\dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ bagi fungsi $y = x^3 + \dfrac{4}{x^2}$.

(b) Jika $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 9$, cari $g''\left(\dfrac{1}{4}\right)$ dan $g''(-1)$.

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned} y &= x^3 + \frac{4}{x^2} \\ &= x^3 + 4x^{-2} \\ \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - 8x^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= 3x^2 - \frac{8}{x^3} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 6x + 24x^{-4} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 6x + \frac{24}{x^4} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 7x - 9 \\ g'(x) &= 6x^2 + 6x - 7 \\ g''(x) &= 12x + 6 \end{aligned}$$

Maka,
$$\begin{aligned} g''\left(\frac{1}{4}\right) &= 12\left(\frac{1}{4}\right) + 6 \\ &= 3 + 6 \\ &= 9 \\ g''(-1) &= 12(-1) + 6 \\ &= -12 + 6 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Contoh 12

Diberi fungsi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, cari nilai-nilai x dengan keadaan $f'(x) = f''(x)$.

Penyelesaian

Diberi $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

Jadi, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ dan $f''(x) = 6x + 4$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= f''(x) \\ 3x^2 + 4x + 3 &= 6x + 4 \\ 3x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ (3x + 1)(x - 1) &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3} \text{ atau } x = 1 \end{aligned}$$

Maka, nilai-nilai x ialah $-\frac{1}{3}$ dan 1.

Kuiz Pantas

Jika $y = 5x - 3$, cari

(a) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2}$

Adakah $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$? Jelaskan.

Latihan Kendiri 2.6

1. Cari $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ bagi setiap fungsi berikut.
   (a) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$ (b) $y = 4x^2 - \frac{2}{x}$ (c) $y = (3x + 2)^8$
2. Cari $f'(x)$ dan $f''(x)$ bagi setiap fungsi berikut.
   (a) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$ (c) $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 1}$
3. Diberi $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$, cari koordinat titik A yang mungkin dengan keadaan $\frac{dy}{dx} = 0$. Seterusnya, cari nilai bagi $\frac{d^2y}{dx^2}$ di titik A itu.

Latihan Formatif 2.3

Kuiz bit.ly/2P9X98B

1. Jika $xy - 2x^2 = 3$, tunjukkan bahawa $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = y$.
2. Cari nilai $f'(1)$ dan $f''(1)$ bagi setiap fungsi berikut.
   (a) $f(x) = 3x - 2x^3$ (b) $f(x) = x^2(5x - 3)$ (c) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2}$
3. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$, cari $f'(3)$ dan $f''(-3)$.
4. Jika $a = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$, cari nilai-nilai t dengan keadaan $\frac{da}{dt} = \frac{d^2a}{dt^2}$.
5. Diberi fungsi $g(x) = hx^3 - 4x^2 + 5x$. Cari nilai h jika $g''(1) = 4$.
6. Diberi $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 9$, cari
   (a) nilai-nilai x dengan keadaan $f'(x) = 0$, (b) $f''(x)$,
   (c) nilai x dengan keadaan $f''(x) = 0$, (d) julat nilai x untuk $f''(x) < 0$.

2.4 Aplikasi Pembezaan

Selain aspek keselamatan, *roller coaster* juga dibina dengan mempertimbangkan kepuasan maksimum pengguna. Setiap titik pada trek *roller coaster* perlu diberi perhatian untuk mencapai matlamat itu.

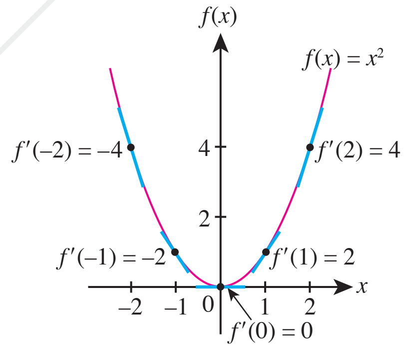
Apakah teknik yang boleh digunakan untuk menentukan kecerunan bagi setiap titik pada trek *roller coaster* itu?

Kecerunan tangen kepada satu lengkung pada titik-titik yang berlainan

Anda telah mempelajari bahawa kecerunan lengkung pada suatu titik ialah kecerunan tangen pada titik tersebut. Kecerunan tangen berbeza bagi setiap titik yang berlainan pada suatu lengkung.

Pertimbangkan fungsi $y = f(x) = x^2$ dengan fungsi kecerunannya, $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x$. Fungsi kecerunan $f'(x)$ digunakan untuk menentukan kecerunan tangen mana-mana garis tangen kepada graf fungsi $f(x)$ di titik tertentu.

Misalnya, bagi fungsi $f(x) = x^2$:
- Apabila $x = -2$, kecerunan tangen, $f'(-2) = 2(-2) = -4$
- Apabila $x = -1$, kecerunan tangen, $f'(-1) = 2(-1) = -2$
- Apabila $x = 0$, kecerunan tangen, $f'(0) = 2(0) = 0$
- Apabila $x = 1$, kecerunan tangen, $f'(1) = 2(1) = 2$
- Apabila $x = 2$, kecerunan tangen, $f'(2) = 2(2) = 4$



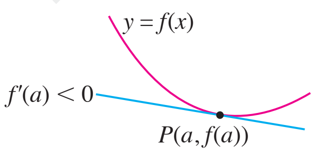
Rajah di sebelah menunjukkan kecerunan tangen kepada lengkung $f(x) = x^2$ pada lima titik yang berlainan.

Secara amnya, jenis kecerunan tangen, $f'(a)$ dan sifatnya kepada suatu lengkung $y = f(x)$ pada titik $P(a, f(a))$ dapat diringkaskan seperti yang berikut.

Kecerunan tangen pada titik di $x = a$, $f'(a)$

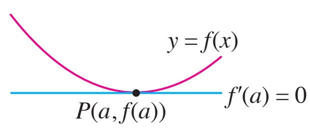
Kecerunan negatif apabila $f'(a) < 0$

Garis tangen condong ke kiri.



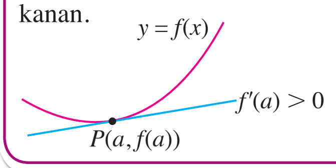
Kecerunan sifar apabila $f'(a) = 0$

Garis tangen mengufuk.



Kecerunan positif apabila $f'(a) > 0$

Garis tangen condong ke kanan.

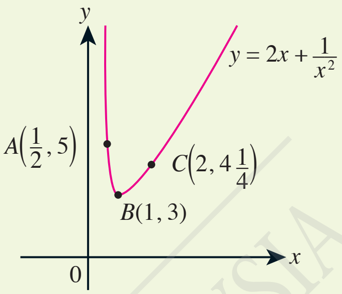


Contoh 13

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 2x + \frac{1}{x^2}$ dan titik-titik $A\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, $B(1, 3)$ dan $C\left(2, 4\frac{1}{4}\right)$ yang terletak pada lengkung itu.

(a) Cari
  (i) ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$,
  (ii) kecerunan tangen bagi lengkung pada titik A, B dan C.

(b) Untuk setiap titik A, B dan C, nyatakan keadaan kecerunan tangennya pada lengkung itu.



Penyelesaian

(a) (i)
$$y = 2x + \frac{1}{x^2}$$
$$= 2x + x^{-2}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2 + (-2x^{-2-1})$$
$$= 2 - 2x^{-3}$$
$$\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2}{x^3}$$

(ii) Kecerunan tangen di $A\left(\frac{1}{2}, 5\right) = 2 - \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$
$= -14$

Kecerunan tangen di $B(1, 3) = 2 - \frac{2}{1^3}$
$= 0$

Kecerunan tangen di $C\left(2, 4\frac{1}{4}\right) = 2 - \frac{2}{2^3}$
$= 1\frac{3}{4}$

(b) Pada titik A, kecerunan tangennya ialah -14 (< 0). Jadi, kecerunannya adalah negatif dengan garis tangen condong ke kiri.

Pada titik B, kecerunan tangennya ialah 0. Jadi, kecerunannya adalah sifar dengan garis tangen adalah mengufuk.

Pada titik C, kecerunan tangennya ialah $1\frac{3}{4}$ (> 0). Jadi, kecerunannya adalah positif dengan garis tangen condong ke kanan.

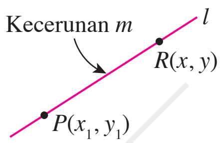
Latihan Kendiri 2.7

1. Persamaan bagi suatu lengkung ialah $y = 9x + \frac{1}{x}$ untuk $x > 0$.
   (a) (i) Cari kecerunan tangen kepada lengkung itu di $x = \frac{1}{4}$ dan $x = 1$.
   (ii) Untuk setiap koordinat-x itu, nyatakan keadaan kecerunan tangennya kepada lengkung itu.
   (b) Seterusnya, cari koordinat titik pada lengkung dengan keadaan garis tangennya adalah mengufuk.

2. Lengkung $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ mempunyai kecerunan -14 dan 7 masing-masing di $x = \frac{1}{2}$ dan $x = 2$.
   (a) Tentukan nilai a dan nilai b.
   (b) Cari koordinat titik pada lengkung dengan keadaan kecerunan tangennya ialah sifar.

Persamaan tangen dan normal kepada satu lengkung pada suatu titik

Pertimbangkan titik $P(x_1, y_1)$ dan titik $R(x, y)$ yang terletak pada garis lurus l dengan kecerunan m seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Didapati bahawa kecerunan $PR = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$.

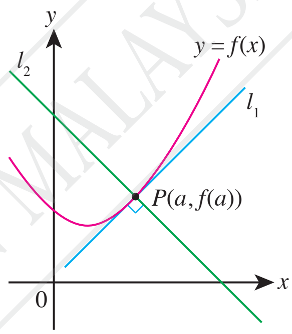


Jadi, rumus bagi persamaan garis lurus l dengan kecerunan m dan melalui titik $P(x_1, y_1)$ boleh ditulis sebagai:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Rumus ini boleh digunakan untuk mencari persamaan tangen dan persamaan normal kepada satu lengkung pada suatu titik tertentu.

Dalam rajah di sebelah, garis l_1 merupakan **tangen** kepada lengkung $y = f(x)$ pada titik $P(a, f(a))$. Kecerunan tangen bagi l_1 ialah nilai bagi $\dfrac{dy}{dx}$ di $x = a$, iaitu $f'(a)$.



Maka, persamaan bagi tangen ialah:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Garis l_2 pula berserenjang dengan tangen l_1 dan disebut sebagai **normal** kepada lengkung $y = f(x)$ pada titik $P(a, f(a))$. Jika kecerunan tangen, $f'(a)$ wujud dan bukan sifar, kecerunan bagi normal berdasarkan hubungan $m_1m_2 = -1$ ialah $-\dfrac{1}{f'(a)}$.

Maka, persamaan bagi normal ialah:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Contoh 14

Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ pada titik $P(2, 5)$.

Penyelesaian

Diberi $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, jadi $f'(x) = 3x^2 - 4x$.

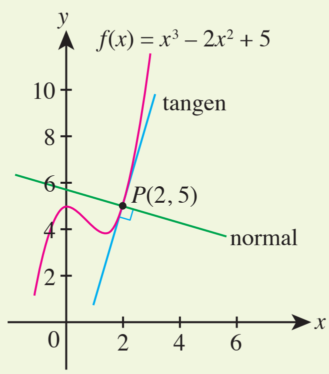
Apabila $x = 2$, $f'(2) = 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$

Kecerunan tangen pada titik $P(2, 5)$ ialah 4.

Persamaan tangen ialah
$$\begin{aligned} y - 5 &= 4(x - 2) \\ y - 5 &= 4x - 8 \\ y &= 4x - 3 \end{aligned}$$

Kecerunan normal pada titik $P(2, 5)$ ialah $-\dfrac{1}{4}$.

Persamaan normal ialah
$$\begin{aligned} y - 5 &= -\frac{1}{4}(x - 2) \\ 4y - 20 &= -x + 2 \\ 4y + x &= 22 \end{aligned}$$



Latihan Kendiri 2.8

1. Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung pada titik yang diberi berikut.

(a) $f(x) = 5x^2 - 7x - 1$ pada titik $(1, -3)$
(b) $f(x) = x^3 - 5x + 6$ pada titik $(2, 4)$
(c) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ pada titik $(4, 3)$
(d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ pada titik $(3, 2)$

2. Cari persamaan tangen dan normal kepada lengkung pada nilai x yang diberi berikut.

(a) $y = 2x^3 - 4x + 3$, $x = 1$
(b) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 4$
(c) $y = \sqrt{x + 1}$, $x = 3$
(d) $y = \dfrac{5}{x^2 + 1}$, $x = -2$
(e) $y = 2 + \dfrac{1}{x}$, $x = -1$
(f) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$, $x = 3$

3. Satu tangen dan normal dilukis pada lengkung $y = x\sqrt{1 - 2x}$ di $x = -4$. Cari

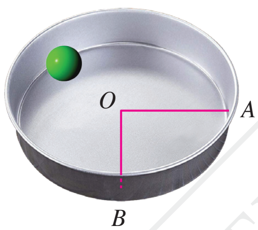
(a) nilai $\dfrac{dy}{dx}$ di $x = -4$,
(b) persamaan tangen,
(c) persamaan normal.

4. (a) Tangen kepada lengkung $y = (x - 2)^2$ pada titik $(3, 1)$ melalui titik $(k, 7)$. Cari nilai k.

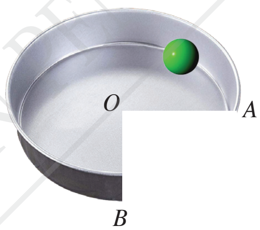
(b) Normal kepada lengkung $y = 7x - \dfrac{6}{x}$ di $x = 1$ menyilang paksi-x di titik A. Cari koordinat A.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan tangen dan normal

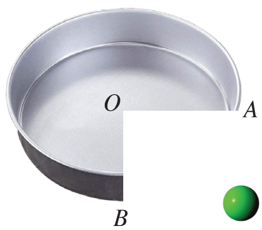
Rajah 2.1(a) menunjukkan sebuah loyang berbentuk bulatan dengan satu daripada sukuannya, iaitu AOB telah dipotong. Sebiji bola diputarkan di dalam loyang itu dan bola berpusing mengikut lilitan loyang yang berbentuk bulatan.



Rajah 2.1(a)



Rajah 2.1(b)



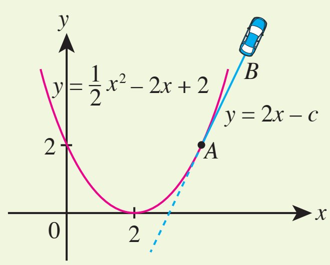
Rajah 2.1(c)

Apakah yang akan berlaku kepada gerakan bola itu apabila sukuan loyang AOB yang dipotong dikeluarkan daripada loyang seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2.1(b)? Adakah gerakan bola itu akan mengikut garis tangen kepada lilitan loyang di titik A?

Contoh 15 APLIKASI MATEMATIK

Rajah di sebelah menunjukkan sebatang jalan raya yang boleh diwakili oleh lengkung $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2$. Kumar memandu keretanya di jalan raya itu. Oleh kerana hujan, jalan tersebut menjadi licin dan menyebabkan Kumar tersasar di titik A lalu mengikut laluan AB yang merupakan garis tangen $y = 2x - c$ kepada jalan raya itu. Cari

(a) koordinat A,
(b) nilai pemalar c.



Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Sebatang jalan raya diwakili oleh lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.
- Kumar memandu keretanya di jalan raya itu dan tersasar di titik A lalu mengikut laluan $y = 2x - c$, iaitu laluan tangen kepada jalan raya.
- Cari koordinat A dan nilai pemalar c.

2 . Merancang strategi

- Cari fungsi kecerunan, $\frac{dy}{dx}$ bagi lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.
- Kecerunan bagi $y = 2x - c$ ialah 2.
- Selesaikan $\frac{dy}{dx} = 2$ untuk memperoleh koordinat A.
- Gantikan koordinat A yang diperoleh ke dalam fungsi $y = 2x - c$ untuk mencari nilai pemalar c.

3 . Melaksanakan strategi

(a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$\frac{dy}{dx} = x - 2$

Oleh sebab $y = 2x - c$ ialah tangen kepada jalan raya $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ di titik A, jadi

$\frac{dy}{dx} = 2$

$x - 2 = 2$

$x = 4$

Oleh sebab titik A terletak di atas lengkung, jadi

$y = \frac{1}{2}(4)^2 - 2(4) + 2$

$y = 2$

Maka, koordinat A ialah (4, 2).

(b) Titik $A(4, 2)$ terletak di atas laluan AB, iaitu $y = 2x - c$, jadi

$2 = 2(4) - c$

$c = 6$

Maka, nilai bagi pemalar c ialah 6.

4 . Membuat refleksi

(a) Gantikan $x = 4$ bagi $A(4, 2)$ ke dalam $y = 2x - 6$, kita peroleh

$y = 2(4) - 6$

$y = 8 - 6$

$y = 2$

(b) Laluan AB, iaitu $y = 2x - c$ dengan kecerunan 2 melalui titik $A(4, 2)$ dan $(0, -c)$, maka

kecerunan $AB = 2$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2$

$\frac{2 - (-c)}{4 - 0} = 2$

$\frac{2 + c}{4} = 2$

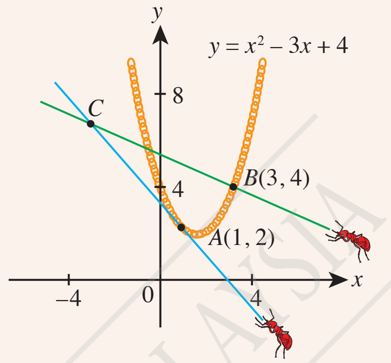
$c + 2 = 8$

$c = 8 - 2$

$c = 6$

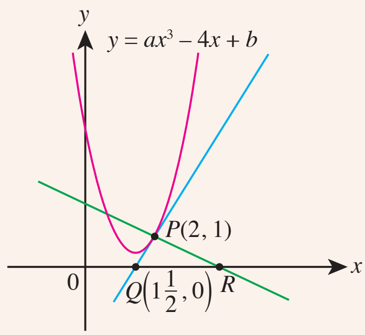
Latihan Kendiri 2.9

1. Rajah di sebelah menunjukkan seutas gelang tangan yang boleh diwakili oleh lengkung $y = x^2 - 3x + 4$ dengan keadaan titik $A(1, 2)$ dan titik $B(3, 4)$ terletak di atas gelang itu. Garis AC ialah tangen kepada gelang pada titik A dan garis BC pula ialah normal kepada gelang pada titik B. Dua ekor semut berjalan masing-masing di sepanjang garis tangen AC dan garis normal BC, dan bertemu pada titik C. Cari
(a) persamaan tangen pada titik A,
(b) persamaan normal pada titik B,
(c) koordinat C, iaitu titik pertemuan kedua-dua ekor semut itu.

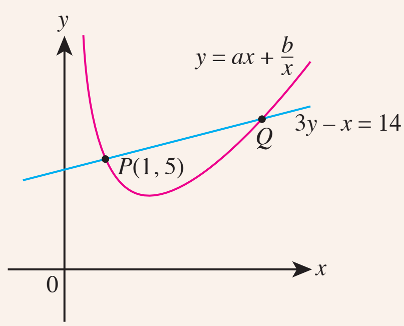


2. Persamaan bagi suatu lengkung ialah $y = 2x^2 - 5x - 2$.
(a) Cari persamaan normal kepada lengkung itu pada titik $A(1, -5)$.
(b) Normal itu bertemu lengkung sekali lagi pada titik B. Cari koordinat B.
(c) Seterusnya, cari koordinat titik tengah AB.

3. Dalam rajah di sebelah, tangen kepada lengkung $y = ax^3 - 4x + b$ di $P(2, 1)$ menyilang paksi-x di $Q\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$. Normal di P pula menyilang paksi-x di R. Cari
(a) nilai a dan nilai b,
(b) persamaan normal di titik P,
(c) koordinat R,
(d) luas segi tiga PQR.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = ax + \frac{b}{x}$. Garis $3y - x = 14$ adalah normal kepada lengkung di titik $P(1, 5)$ dan normal ini bertemu lengkung sekali lagi di titik Q. Cari
(a) nilai a dan nilai b,
(b) persamaan tangen di titik P,
(c) koordinat Q,
(d) koordinat titik tengah PQ.



5. (a) Tangen kepada lengkung $y = \sqrt{2x + 1}$ di titik $A(4, 3)$ memotong paksi-x di titik B. Cari jarak AB.
(b) Tangen kepada lengkung $y = hx^3 + kx + 2$ di $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ adalah selari dengan normal kepada lengkung $y = x^2 + 6x + 4$ di $(-2, -4)$. Cari nilai pemalar h dan nilai pemalar k.

Titik pusingan dan sifat titik pusingan tersebut

Terdapat tiga jenis titik pegun, iaitu titik maksimum, titik minimum dan titik lengkok balas. Antara titik pegun itu, yang manakah ialah titik pusingan dan bukan titik pusingan? Mari teroka cara untuk menentukan titik pegun dan sifat-sifatnya.

Aktiviti Penerokaan 7

Berkumpulan PAK-21 STEM PK

Tujuan: Menentukan titik pegun pada graf suatu fungsi dan menghuraikan sifat titik pegun itu dengan memerhatikan kecerunan titik-titik kejiranannya

ggbm.at/tggjh78b

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan graf $y = -x^2 + 2x + 3$ dan tangen kepada lengkung itu pada titik P yang terpapar pada satah.
3. Seret titik P di sepanjang lengkung itu dan perhatikan kecerunan lengkung pada titik P.
4. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

Koordinat-x bagi titik P	-1	0	1	2	3
Kecerunan lengkung pada titik P, $\frac{dy}{dx}$	4				
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	+				
Lakaran tangen					
Lakaran graf					

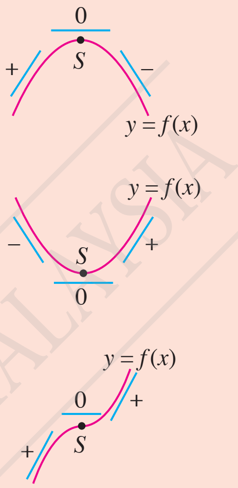
5. Gantikan nilai a, b dan c pada petak fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ untuk memperoleh graf bagi lengkung $y = x^2 + 2x - 3$ pula. Ulang langkah 3 dan 4 dengan menggantikan koordinat-x bagi titik P dalam jadual tersebut dengan $x = -3, -2, -1, 0$ dan 1.
6. Klik pada petak $f(x) = ax^2 + bx + c$ sekali lagi dan tukarkan x^2 kepada x^3. Kemudian, gantikan nilai a, b dan c bagi fungsi itu untuk memperoleh graf bagi lengkung $y = x^3 + 4$. Ulang langkah 3 dan 4 dengan menggantikan koordinat-x bagi titik P dalam jadual tersebut dengan $x = -2, -1, 0, 1$ dan 2.
7. Untuk setiap fungsi yang telah diteroka berikut:
   (a) $y = -x^2 + 2x + 3$ (b) $y = x^2 + 2x - 3$ (c) $y = x^3 + 4$
   (i) Nyatakan koordinat bagi titik pegun.
   (ii) Apabila x menokok melalui titik pegun itu, bagaimanakah nilai $\frac{dy}{dx}$ berubah?
   (iii) Apakah yang dapat anda perhatikan pada tanda bagi kecerunan lengkung itu?
   (iv) Tentukan jenis dan sifat titik pegun itu.
8. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas dan lakukan sesi soal jawab bersama dengan rakan yang lain.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 7, didapati bahawa suatu titik pegun boleh ditentukan apabila $\dfrac{dy}{dx} = 0$ dan sifat titik pegun itu dapat diringkaskan seperti berikut:

Bagi suatu lengkung $y = f(x)$ dengan titik pegun S di $x = a$,

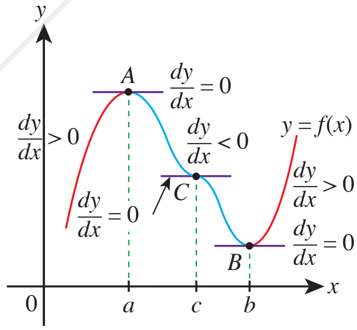
- Jika $\dfrac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada positif kepada negatif apabila x menokok melalui a, titik S ialah titik maksimum.
- Jika $\dfrac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada negatif kepada positif apabila x menokok melalui a, titik S ialah titik minimum.
- Jika $\dfrac{dy}{dx}$ tidak berubah tanda apabila x menokok melalui a, titik S ialah **titik lengkok balas**.

Titik pegun disebut sebagai **titik pusingan** jika titik itu ialah titik maksimum atau minimum.



Pertimbangkan graf bagi fungsi $y = f(x)$ seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Berdasarkan rajah, graf fungsi menaik yang berwarna merah mempunyai kecerunan positif, iaitu $\dfrac{dy}{dx} > 0$ manakala graf fungsi menurun yang berwarna biru mempunyai kecerunan negatif, iaitu $\dfrac{dy}{dx} < 0$.

Titik dengan keadaan $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = 0$ disebut sebagai **titik pegun** dengan tangen kepada graf pada titik pegun adalah mengufuk. Oleh itu, titik A, B dan C ialah titik pegun bagi $y = f(x)$.



Daripada graf $y = f(x)$ di sebelah, didapati bahawa:

Titik pegun A ialah titik maksimum

Apabila x menokok melalui $x = a$, nilai $\dfrac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada positif kepada negatif.

Titik pegun B ialah titik minimum

Apabila x menokok melalui $x = b$, nilai $\dfrac{dy}{dx}$ berubah tanda daripada negatif kepada positif.

Titik maksimum A dan titik minimum B ini disebut sebagai **titik pusingan**. Di titik pegun C pula, nilai $\dfrac{dy}{dx}$ tidak berubah tanda apabila x menokok melalui $x = c$. Titik pegun C bukan titik pusingan. Titik pegun yang bukan titik maksimum atau titik minimum ini disebut sebagai **titik lengkok balas**, iaitu titik pada saat berlakunya perubahan kecekungan suatu graf.

Contoh 16

Diberi lengkung $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.
(a) Cari koordinat titik pusingan bagi lengkung itu.
(b) Tentukan sama ada setiap titik pusingan itu ialah titik maksimum atau minimum.

Penyelesaian

(a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$
$$= 3(x^2 - 2x - 3)$$
$$\frac{dy}{dx} = 3(x + 1)(x - 3)$$

Untuk titik pusingan, $\frac{dy}{dx} = 0$

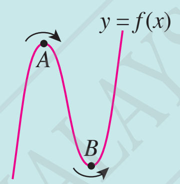
$$3(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x = -1 \text{ atau } x = 3$$

Apabila $x = -1$, $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 11$
$y = 16$

Apabila $x = 3$, $y = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 11$
$y = -16$

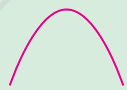
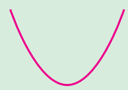
Maka, titik pusingan ialah $(-1, 16)$ dan $(3, -16)$.

Sudut Informasi



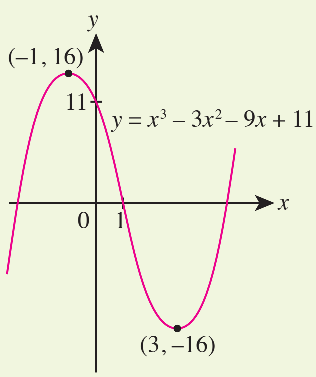
Apabila lengkung $y = f(x)$ berpusing dan bertukar arah pada titik A dan titik B, titik maksimum A dan titik minimum B disebut sebagai titik pusingan.

(b)

x	-1.5	-1	-0.5	2.5	3	3.5
$\frac{dy}{dx}$	6.75	0	–5.25	–5.25	0	6.75
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	+	0	–	–	0	+
Lakaran tangen						
Lakaran graf						

Daripada jadual, tanda bagi $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada positif kepada negatif apabila x menokok melalui $x = -1$ dan tanda bagi $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada negatif kepada positif apabila x menokok melalui $x = 3$. Maka, titik pusingan $(-1, 16)$ ialah titik maksimum dan titik pusingan $(3, -16)$ ialah titik minimum.

Lakaran graf bagi lengkung $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ dengan titik pusingan maksimum $(-1, 16)$ dan titik pusingan minimum $(3, -16)$ dapat ditunjukkan seperti dalam rajah di sebelah.



Selain kaedah **lakaran tangen** bagi suatu fungsi $y = f(x)$, **pembezaan peringkat kedua**, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ jika wujud, boleh digunakan untuk menentukan sama ada suatu titik pusingan ialah titik maksimum atau minimum.

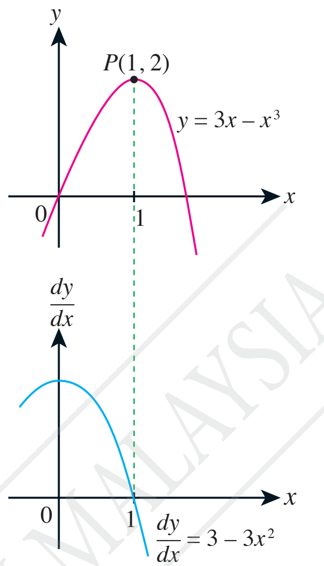
Rajah 2.2 menunjukkan graf bagi lengkung $y = 3x - x^3$ dengan titik pusingan $P(1, 2)$ dan graf bagi fungsi kecerunannya, $\dfrac{dy}{dx} = 3 - 3x^2$.

Daripada graf $\dfrac{dy}{dx}$ melawan x, perhatikan bahawa:

$\dfrac{dy}{dx}$ menurun apabila x menokok melalui $x = 1$

$\Leftrightarrow$ Kadar perubahan $\dfrac{dy}{dx}$ ialah negatif di $x = 1$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) < 0$ di $x = 1$



Rajah 2.2

Sudut Informasi

- Kaedah lakaran tangen digunakan untuk menentukan sifat suatu titik pegun.
- Kaedah terbitan kedua pula digunakan untuk menentukan sifat suatu titik pusingan.

Jadi, titik pusingan $P(1, 2)$ dengan $\dfrac{dy}{dx} = 0$ dan $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) < 0$ ialah titik maksimum.

Secara amnya,

Suatu titik pusingan pada lengkung $y = f(x)$ ialah titik maksimum apabila $\dfrac{dy}{dx} = 0$ dan $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$.

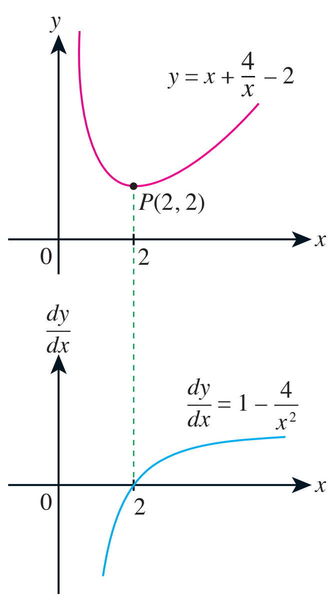
Rajah 2.3 pula menunjukkan graf bagi lengkung $y = x + \dfrac{4}{x} - 2$ dengan titik pusingan $P(2, 2)$ dan graf bagi fungsi kecerunannya, $\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{4}{x^2}$.

Daripada graf $\dfrac{dy}{dx}$ melawan x, perhatikan bahawa:

$\dfrac{dy}{dx}$ meningkat apabila x menokok melalui $x = 2$

$\Leftrightarrow$ Kadar perubahan $\dfrac{dy}{dx}$ ialah positif di $x = 2$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) > 0$ di $x = 2$



Rajah 2.3

Jadi, titik pusingan $P(2, 2)$ dengan $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$ ialah titik minimum.

Secara amnya,

> Suatu titik pusingan pada lengkung $y = f(x)$ ialah titik minimum apabila $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$.

Contoh 17

Cari titik-titik pegun bagi setiap lengkung berikut dan tentukan sifat setiap titik pegun itu.

(a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ (b) $y = x^4 - 4x^3 + 1$

Penyelesaian

(a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 12$$
$$= 6(x^2 + x - 2)$$
$$\frac{dy}{dx} = 6(x + 2)(x - 1)$$

Untuk titik pegun, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$6(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = -2 \text{ atau } x = 1$$

Apabila $x = -2$, $y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 5$

$y = 25$

Apabila $x = 1$, $y = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 5$

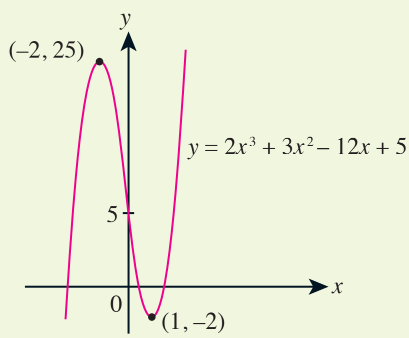
$y = -2$

Maka, titik pegun ialah $(-2, 25)$ dan $(1, -2)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6$$

Apabila $x = -2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-2) + 6 = -18 < 0$

Apabila $x = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(1) + 6 = 18 > 0$



Maka, $(-2, 25)$ ialah titik maksimum dan $(1, -2)$ ialah titik minimum.

(b) $y = x^4 - 4x^3 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 12x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 4x^2(x - 3)$$

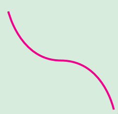
Untuk titik pegun, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$4x^2(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ atau } x = 3$$

Apabila $x = 0$, $y = 0^4 - 4(0)^3 + 1 = 1$
Apabila $x = 3$, $y = 3^4 - 4(3)^3 + 1 = -26$
Maka, titik pegun ialah (0, 1) dan (3, –26).

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 24x$

Apabila $x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(0)^2 - 24(0) = 0$

x	-0.1	0	0.1
$\frac{dy}{dx}$	-0.124	0	-0.116
Tanda bagi $\frac{dy}{dx}$	–	0	–
Lakaran tangen	\	—	\
Lakaran graf			

Daripada jadual, didapati bahawa $\frac{dy}{dx}$ berubah daripada negatif kepada sifar dan kemudian kepada negatif sekali lagi, iaitu tiada perubahan tanda apabila x menokok melalui 0.
Maka, (0, 1) ialah titik lengkok balas.

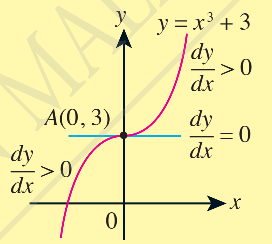
Apabila $x = 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(3)^2 - 24(3) = 36 > 0$

Maka, (3, –26) ialah titik minimum.

Tip Pintar

Apabila $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, kaedah lakaran tangen digunakan untuk menentukan sifat suatu titik pegun.

PERBINCANGAN



Dalam rajah di atas, titik A bukan titik maksimum atau titik minimum bagi fungsi $y = x^3 + 3$, tetapi disebut sebagai titik lengkok balas. Bolehkah anda berikan tiga contoh fungsi lain yang mempunyai titik lengkok balas?

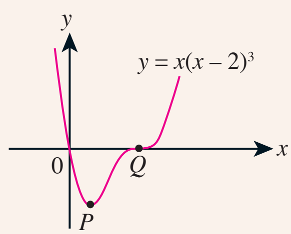
Latihan Kendiri 2.10

1. Cari koordinat titik pusingan bagi setiap lengkung berikut. Dalam setiap kes, tentukan sama ada titik pusingan itu ialah titik maksimum atau titik minimum.

(a) $y = x^3 - 12x$ (b) $y = x(x - 6)^2$ (c) $y = x\sqrt{18 - x^2}$ (d) $y = (x - 6)(4 - 2x)$
(e) $y = x + \frac{4}{x}$ (f) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ (g) $y = x + \frac{1}{x - 1}$ (h) $y = \frac{(x - 3)^2}{x}$

2. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = x(x - 2)^3$.

(a) Cari ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$.
(b) Cari koordinat titik bagi dua titik pegun P dan Q.
(c) Seterusnya, tentukan sifat bagi titik pegun Q menggunakan kaedah lakaran tangen.



Menyelesaikan masalah yang melibatkan nilai maksimum dan nilai minimum serta mentafsir penyelesaian tersebut

Kebanyakan tin makanan dan minuman yang terdapat di pasar raya berbentuk silinder. Bagaimanakah pengeluar tin makanan dan minuman boleh menentukan ukuran tin tersebut supaya kos pengeluarannya dapat diminimumkan?

Adakah teknik pembezaan peringkat pertama dan kedua boleh membantu pengeluar tin menyelesaikan masalah itu?

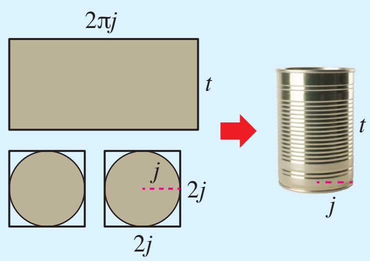
Contoh 18 — APLIKASI MATEMATIK

Sebuah kilang ingin menghasilkan tin makanan berbentuk silinder yang diperbuat daripada beberapa kepingan aluminium dengan isi padu 512 cm^3. Permukaan melengkung tin dibentuk dengan menggulung sekeping aluminium berbentuk segi empat tepat manakala bahagian atas dan bawah tin dibentuk dengan memotong keluar dua buah bulatan daripada dua keping aluminium berbentuk segi empat sama. Cari jejari tapak tin itu, dalam cm, supaya jumlah luas permukaan semua kepingan aluminium yang digunakan adalah minimum.

Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Katakan j cm ialah jejari tapak dan t cm adalah tinggi tin.
- Isi padu tin, $I = \pi j^2 t = 512$ cm^3
- Jumlah luas permukaan kepingan aluminium yang digunakan,
  $L = 2(2j)^2 + 2\pi jt$
  $L = 2(4j^2) + 2\pi jt$
  $L = 8j^2 + 2\pi jt$
- Cari nilai j dengan keadaan L adalah minimum.



2 . Merancang strategi

- Ungkapkan L dalam sebutan satu pemboleh ubah tunggal, iaitu dengan mengungkapkan t dalam sebutan j.
- Cari nilai j apabila $\dfrac{dL}{dj} = 0$.
- Menggunakan nilai j yang diperoleh, tentukan sama ada L adalah maksimum atau minimum.

3 . Melaksanakan strategi

Isi padu tin, $I = 512$

$$\pi j^2 t = 512$$

$$t = \frac{512}{\pi j^2} \quad \ldots \text{ 1}$$

Jumlah luas permukaan, L cm^2, kepingan-kepingan aluminium yang digunakan diberi oleh

$$L = 8j^2 + 2\pi jt \quad \ldots \text{ 2}$$

Gantikan 1 ke dalam 2,

$$L = 8j^2 + 2\pi j\left(\frac{512}{\pi j^2}\right)$$

$$L = 8j^2 + \frac{1\ 024}{j}$$

$$\frac{dL}{dj} = 16j - \frac{1\ 024}{j^2}$$

Untuk nilai minimum, $\frac{dL}{dj} = 0$

$$16j - \frac{1\ 024}{j^2} = 0$$

$$16j^3 - 1\ 024 = 0$$

$$j^3 = \frac{1\ 024}{16}$$

$$j^3 = 64$$

$$j = \sqrt[3]{64}$$

$$j = 4$$

$$\frac{dL}{dj} = 16j - 1\ 024j^{-2}$$

$$\frac{d^2L}{dj^2} = 16 + \frac{2\ 048}{j^3}$$

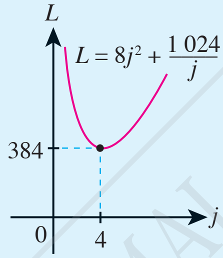
Apabila $j = 4$, $\frac{d^2L}{dj^2} = 16 + \frac{2\ 048}{4^3}$

$$= 48 > 0$$

Maka, L mempunyai nilai minimum apabila jejari tapak ialah 4 cm.

4 . Membuat refleksi dan tafsiran

Lakaran graf bagi $L = 8j^2 + \frac{1\ 024}{j}$ menunjukkan bahawa nilai L adalah minimum di $j = 4$.



Jadi, kilang itu perlu menghasilkan tin makanan dengan jejari tapak ialah 4 cm dan tinggi, $t = \frac{512}{\pi j^2} = \frac{512}{\pi(4)^2}$ $= 10.186$ cm supaya jumlah luas permukaan kepingan-kepingan aluminium yang digunakan adalah minimum.

Kuiz Pantas

Daripada dua persamaan yang terbentuk dalam Contoh 18,

$\pi j^2 t = 512$ ... 1

$L = 8j^2 + 2\pi jt$ ... 2

Bagi persamaan 1, bolehkah kita mengungkapkan j dalam sebutan t dan menggantikannya ke dalam persamaan 2 untuk menyelesaikan masalah dalam Contoh 18 ini? Bincangkan.

Latihan Kendiri 2.11

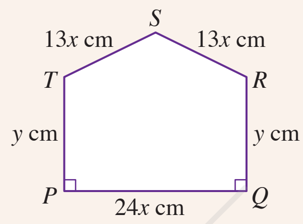
1. Seutas wayar dengan panjang 80 cm dibengkokkan untuk membentuk sebuah sektor POQ bagi sebuah bulatan berpusat O. Diberi bahawa $OQ = j$ cm dan $\angle POQ = \theta$ radian.

(a) Tunjukkan bahawa luas, A cm^2, bagi sektor POQ itu diberi oleh $A = \frac{1}{2}j(80 - 2j)$.

(b) Seterusnya, cari luas maksimum bagi sektor POQ itu.

2.4.5

2. Seutas dawai dengan panjang 240 cm dibengkokkan kepada suatu bentuk seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah.
   (a) Ungkapkan y dalam sebutan x.
   (b) Tunjukkan bahawa luas, L cm^2, yang dilitupi oleh dawai itu diberi oleh $L = 2\ 880x - 540x^2$.
   (c) Cari
      (i) nilai x dan nilai y supaya L adalah maksimum,
      (ii) luas maksimum, dalam cm^2, rantau itu.



3. Sebuah kilang menghasilkan tin minuman berbentuk silinder tegak tertutup dengan isi padu 32π cm^3. Kos bahan yang digunakan untuk bulatan atas dan bawah tin itu ialah 2 sen per cm^2 manakala sisi melengkung tin ialah 1 sen per cm^2.
   (a) Tunjukkan bahawa fungsi kos, C membuat tin minuman itu diberi oleh $C = 4\pi j^2 + \dfrac{64\pi}{j}$, dengan j ialah jejari tapak kon.
   (b) Cari ukuran tin supaya kos yang digunakan oleh kilang itu adalah minimum.

Mentafsir dan menentukan kadar perubahan bagi kuantiti yang terhubung

Aktiviti Penerokaan 8 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka kadar perubahan kedalaman air daripada graf kedalaman-masa

Langkah:

1. Pertimbangkan dua buah bekas berbentuk silinder dan kon yang diisi dengan air pada kadar malar 3π cm^{3}s^{-1} daripada sebuah pili air. Setiap bekas itu mempunyai tinggi 9 cm dan isi padu 48π cm^3.
2. Tentukan masa, t, dalam saat, yang diperlukan untuk memenuhkan air di dalam setiap bekas itu.
3. Berdasarkan luas permukaan air di dalam setiap bekas, lakarkan graf kedalaman-masa untuk menunjukkan hubungan antara kedalaman aras air, h cm, dengan masa yang diambil, t saat, untuk memenuhkan air di dalam kedua-dua bekas itu.
4. Perhatikan bentuk graf yang diperoleh. Kemudian, jawab soalan yang berikut.
   (a) Berdasarkan kecerunan setiap graf, tentukan kadar perubahan kedalaman air pada masa tertentu di dalam setiap bekas itu.
   (b) Adakah kedalaman air di dalam bekas berbentuk silinder meningkat pada kadar malar apabila bekas diisi dengan air? Bagaimanakah pula dengan kedalaman air di dalam bekas berbentuk kon? Adakah kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas berbentuk kon berubah apabila air diisikan?
5. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Daripada Aktiviti Penerokaan 8, didapati bahawa kadar perubahan kedalaman air, $\dfrac{dh}{dt}$ pada masa tertentu, t ialah kecerunan lengkung pada t dengan andaian air mengalir ke dalam bekas pada kadar yang malar. Kadar perubahan ini boleh diperoleh dengan melukis suatu tangen kepada lengkung itu pada t atau menggunakan pembezaan untuk mencari kecerunan tangen pada t. Konsep **petua rantai** juga boleh digunakan untuk menyelesaikan masalah seperti ini dengan mudah.

2.4.5 2.4.6

Misalnya, jika dua pemboleh ubah y dan x berubah dengan masa, t dan dihubungkan oleh persamaan $y = f(x)$, maka kadar perubahan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dx}{dt}$ boleh dihubungkan oleh:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \text{ (Petua rantai)}}$$

Pertimbangkan lengkung $y = x^2 + 1$. Jika x menokok dengan kadar tetap 2 unit per saat, iaitu $\frac{dx}{dt} = 2$, maka kadar perubahan y diberi oleh:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} \quad \leftarrow \boxed{\text{Petua rantai}}\\ &= 2x \times 2\\ &= 4x\end{aligned}$$

Apabila $x = 2$, $\frac{dy}{dt} = 4(2) = 8$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah 8 unit per saat dan y dikatakan menokok pada kadar 8 unit per saat pada ketika $x = 2$.

Apabila $x = -2$, $\frac{dy}{dt} = 4(-2) = -8$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah -8 unit per saat dan y dikatakan menyusut pada kadar 8 unit per saat pada ketika $x = -2$.

Contoh 19

Suatu lengkung mempunyai persamaan $y = x^2 + \frac{4}{x}$. Cari

(a) ungkapan bagi $\frac{dy}{dx}$,

(b) kadar perubahan y apabila $x = 1$ dan $x = 2$, diberi bahawa x menokok dengan kadar tetap 3 unit per saat.

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned}y &= x^2 + \frac{4}{x}\\ &= x^2 + 4x^{-1}\\ \frac{dy}{dx} &= 2x - 4x^{-2}\\ \frac{dy}{dx} &= 2x - \frac{4}{x^2}\end{aligned}$$

(b) Apabila $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2(1) - \frac{4}{1^2}$
$= -2$

Kadar perubahan y diberi oleh:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}\\ &= -2 \times 3\\ &= -6\end{aligned}$$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah -6 unit per saat.
Maka, y dikatakan menyusut pada kadar 6 unit per saat.

Tip Pintar

- $\frac{dy}{dx}$ ialah kadar perubahan y terhadap x.
- $\frac{dy}{dt}$ ialah kadar perubahan y terhadap t.
- $\frac{dx}{dt}$ pula ialah kadar perubahan x terhadap t.

Apabila $x = 2$, $\dfrac{dy}{dx} = 2(2) - \dfrac{4}{2^2}$
$= 3$

Kadar perubahan y diberi oleh:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$
$$= 3 \times 3$$
$$= 9$$

Jadi, kadar perubahan dalam y ialah 9 unit per saat.
Maka, y dikatakan menokok pada kadar 9 unit per saat.

Tip Pintar

Jika kadar perubahan y terhadap masa adalah negatif, misalnya $\dfrac{dy}{dt} = -6$, maka y dikatakan menyusut pada kadar 6 unit s^{-1}, iaitu kadar susutannya ialah 6 unit s^{-1}.

Latihan Kendiri 2.12

1. Bagi setiap persamaan yang menghubungkan x dan y berikut, jika kadar perubahan x ialah 2 unit s^{-1}, cari kadar perubahan y pada ketika yang diberi.

(a) $y = 3x^2 - 4$, $x = \dfrac{1}{2}$ (b) $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$, $x = 1$ (c) $y = \dfrac{2}{(3x-5)^3}$, $x = 2$

(d) $y = (4x-3)^5$, $x = \dfrac{1}{2}$ (e) $y = \dfrac{x}{x+1}$, $y = 2$ (f) $y = x^3 + 2$, $y = 10$

2. Bagi setiap persamaan yang menghubungkan x dan y berikut, jika kadar perubahan y ialah 6 unit s^{-1}, cari kadar perubahan x pada ketika yang diberi.

(a) $y = x^3 - 2x^2$, $x = 1$ (b) $y = x^2 + \dfrac{4}{x}$, $x = 2$ (c) $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$, $x = 3$

(d) $y = (x-6)\sqrt{x-1}$, $x = 2$ (e) $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, $y = 3$ (f) $y = \sqrt{2x+7}$, $y = 3$

3. Suatu lengkung mempunyai persamaan $y = (x-8)\sqrt{x+4}$. Cari

(a) ungkapan bagi $\dfrac{dy}{dx}$,

(b) kadar perubahan y pada ketika $x = 5$, jika x menokok dengan kadar 6 unit per saat.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan kadar perubahan bagi kuantiti yang terhubung dan mentafsir penyelesaian tersebut

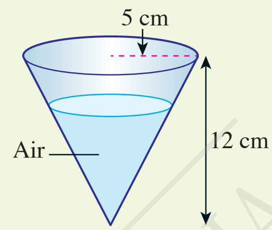
Hubungan antara jisim, M, dalam kg, dengan jejari, j, dalam cm, sebiji tembikai yang berbentuk sfera diwakili oleh persamaan $M = \dfrac{2}{625}j^3$. Andaikan jejari tembikai bertambah pada kadar tetap 0.1 cm per hari dan jejarinya ialah 10 cm pada hari tertentu.

Dengan menggunakan petua rantai yang menghubungkan kadar perubahan kuantiti jisim, $\dfrac{dM}{dt}$ dan jejari tembikai, $\dfrac{dj}{dt}$, bolehkah anda tentukan kadar perubahan jisim tembikai pada hari tersebut?

2.4.6 2.4.7

Contoh 20

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah bekas berisi air yang berbentuk kon dengan jejari 5 cm dan tinggi 12 cm. Didapati bahawa air tersebut mengalir keluar melalui lubang kecil di hujung bekas dengan kadar tetap 4 cm^{3}s^{-1}. Cari kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas itu apabila kedalaman air ialah 3 cm, betul kepada empat angka bererti.

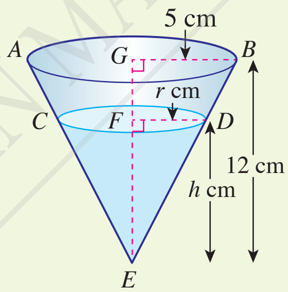


Penyelesaian

Katakan r cm, h cm dan V cm^3 masing-masing ialah jejari, tinggi dan isi padu air di dalam bekas itu pada masa t saat.

Jadi, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ … ❶

Didapati bahawa ΔDFE dan ΔBGE adalah serupa.



Jadi, $\frac{r}{5} = \frac{h}{12}$

$r = \frac{5h}{12}$ … ❷

Gantikan ❷ ke dalam ❶:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5h}{12}\right)^2 h$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{25h^2}{144}\right)h$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{25h^3}{144}\right)$$
$$V = \frac{25\pi}{432}h^3$$

Kadar perubahan V diberi oleh petua rantai berikut.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \times \frac{dh}{dt}$$
$$= \frac{d}{dh}\left(\frac{25\pi}{432}h^3\right) \times \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{144}h^2 \times \frac{dh}{dt}$$

Apabila $h = 3$ dan $\frac{dV}{dt} = -4$, kita peroleh

$$-4 = \frac{25\pi}{144}(3)^2 \times \frac{dh}{dt}$$

V menyusut, maka $\frac{dV}{dt}$ adalah negatif

$$-4 = \frac{25\pi}{16} \times \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{64}{25\pi}$$
$$= -0.8148$$

Maka, kadar perubahan kedalaman air di dalam bekas itu ialah -0.8148 cms^{-1} dan kedalaman air dikatakan menyusut pada kadar 0.8148 cms^{-1}.

PERBINCANGAN

Bincangkan masalah yang berikut bersama-sama rakan anda.

Air dimasukkan ke dalam sebuah tangki yang berbentuk kon membulat dengan jejari 8 cm dan tinggi 16 cm dengan kadar malar 64π cm^{3}s^{-1}.

Katakan h cm ialah kedalaman air di dalam tangki dan V cm^3 ialah isi padu air di dalam tangki. Cari kadar perubahan bagi
(a) kedalaman air,
(b) luas permukaan mengufuk aras air,
apabila kedalaman air ialah 8 cm.

Contoh 21 APLIKASI MATEMATIK

Jejari sebiji belon berbentuk sfera yang diisikan dengan udara bertambah pada kadar tetap 0.5 cm per saat. Cari kadar perubahan isi padu belon itu apabila jejarinya ialah 4 cm, betul kepada empat angka bererti.

Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Jejari sebiji belon yang diisikan dengan udara bertambah pada kadar tetap 0.5 cm per saat.
- Cari kadar perubahan isi padu belon apabila jejarinya ialah 4 cm.

2 . Merancang strategi

- Katakan j cm dan I cm^3 masing-masing ialah jejari dan isi padu belon pada masa t saat.
- Bentukkan satu persamaan yang menghubungkan isi padu, I dan jejari, j belon itu.
- Gunakan petua rantai untuk menghubungkan kadar perubahan isi padu dan jejari belon itu.

3 . Melaksanakan strategi

Andaikan $I = f(j)$.

Kadar perubahan I diberi oleh:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI}{dj} \times \frac{dj}{dt}$$

Diketahui bahawa $I = \frac{4}{3}\pi j^3$.

Jadi,
$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dj}\left(\frac{4}{3}\pi j^3\right) \times \frac{dj}{dt}$$
$$\frac{dI}{dt} = 4\pi j^2 \times \frac{dj}{dt}$$

Apabila $j = 4$ dan $\frac{dj}{dt} = 0.5$, maka

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= 4\pi(4)^2 \times 0.5\\ &= 4\pi(16) \times 0.5\\ &= 64\pi \times 0.5\\ &= 32\pi\\ &= 32(3.142)\\ &= 100.5\end{aligned}$$

Maka, kadar perubahan isi padu belon apabila $j = 4$ cm ialah 100.5 cm^3 per saat.

4 . Membuat refleksi dan tafsiran

Apabila $\frac{dI}{dt} = 100.5$ dan $\frac{dj}{dt} = 0.5$, maka

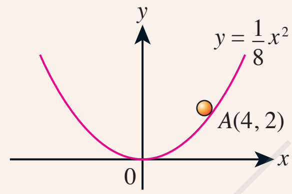
$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{dI}{dj} \times \frac{dj}{dt}\\ 100.5 &= 4\pi j^2 \times 0.5\\ 100.5 &= 2\pi j^2\\ j^2 &= \frac{100.5}{2\pi}\\ j^2 &= \frac{100.5}{2(3.142)}\\ j^2 &= 15.993\\ j &= \sqrt{15.993}\\ j &= \pm 4\end{aligned}$$

Maka, $j = 4$ cm.

Jadi, apabila $j = 4$ dan $\frac{dI}{dt} = 100.5$ bermaksud pada ketika jejari belon ialah 4 cm, isi padunya menokok dengan kadar 100.5 cm^3 per saat.

Latihan Kendiri 2.13

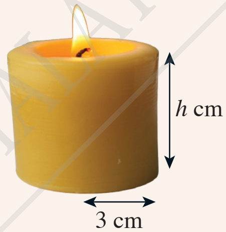
1. Rajah di sebelah menunjukkan sebutir manik yang bergerak di sepanjang lengkung $y = \frac{1}{8}x^2$. Pada titik $A(4, 2)$, kadar perubahan x ialah 3 unit s^{-1}. Cari kadar perubahan y yang sepadan.



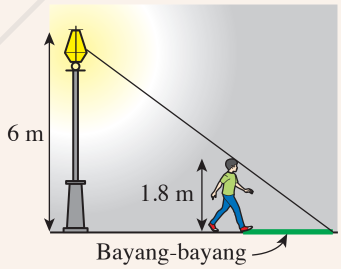
2. Luas sebuah segi empat sama dengan sisi x cm bertambah dengan kadar 8 cm^2s^{-1}. Cari kadar perubahan panjang sisinya apabila luasnya ialah 4 cm^2.

3. Seketul ais berbentuk kubus dengan sisi x cm mencair pada kadar 10.5 cm^3 per minit. Cari kadar perubahan x pada ketika $x = 10$ cm.

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebatang lilin yang berbentuk silinder tegak dan berjejari 3 cm. Tinggi lilin itu ialah h cm dan isi padunya ialah V cm^3. Lilin itu terbakar dengan keadaan tingginya menyusut pada kadar 0.6 cm per minit.
   (a) Ungkapkan V dalam sebutan h.
   (b) Cari kadar perubahan isi padu lilin itu apabila tingginya ialah 8 cm.

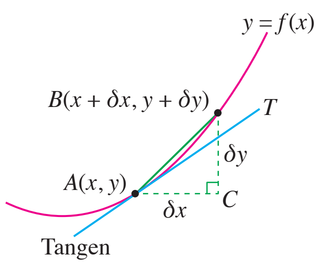


5. Chandran berjalan pada kadar 3.5 ms^{-1} daripada sebatang tiang lampu pada waktu malam seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah. Tinggi Chandran dan tiang lampu itu masing-masing ialah 1.8 m dan 6 m. Cari kadar perubahan
   (a) panjang bayang-bayang Chandran,
   (b) hujung bayang-bayangnya yang bergerak.



Mentafsir dan menentukan perubahan kecil dan penghampiran suatu kuantiti

Pertimbangkan lengkung $y = f(x)$ dalam rajah di sebelah. Dua titik berhampiran, iaitu titik $A(x, y)$ dan titik $B(x + \delta x, y + \delta y)$ terletak di atas lengkung itu dan AT ialah tangen pada titik A. Perhatikan bahawa $AC = \delta x$ dan $BC = \delta y$.



Diketahui bahawa kecerunan tangen AT ialah:

$$\text{Nilai bagi } \frac{dy}{dx} \text{ pada titik } A = \text{Nilai bagi } \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

dengan δy dan δx masing-masing ialah perubahan kecil dalam y dan x.

Jika δx ialah suatu nilai yang kecil, iaitu $\delta x \to 0$, maka $\frac{\delta y}{\delta x}$ adalah penghampiran terbaik bagi $\frac{dy}{dx}$.

Jadi, $\frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{dy}{dx}$.

Secara amnya, jika δx ialah nilai yang kecil, maka

$$\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$$

Rumus ini sangat berguna untuk mencari perubahan hampir dalam satu kuantiti akibat perubahan kecil dalam kuantiti yang satu lagi. Semakin kecil nilai δx, semakin tepat penghampirannya. Oleh itu, kita boleh tafsirkan bahawa:

PERBINCANGAN

Jika nilai δx adalah terlalu besar, adakah anda boleh menggunakan rumus $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$? Jelaskan.

Bagi suatu fungsi $y = f(x)$, dengan δy ialah perubahan kecil dalam y dan δx ialah perubahan kecil dalam x,
- Apabila $\delta y > 0$, maka berlaku tokokan kecil dalam y akibat perubahan kecil dalam x, iaitu δx.
- Apabila $\delta y < 0$, maka berlaku susutan kecil dalam y akibat perubahan kecil dalam x, iaitu δx.

Seterusnya, oleh sebab $f(x + \delta x) = y + \delta y$ dan $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$, kita peroleh:

$$f(x + \delta x) \approx y + \frac{dy}{dx}\delta x \text{ atau } f(x + \delta x) \approx f(x) + \frac{dy}{dx}\delta x$$

Rumus ini boleh digunakan untuk mencari nilai hampir bagi y.

Contoh 22

Diberi bahawa $y = x^3$, cari
(a) perubahan hampir dalam y jika x menokok daripada 4 kepada 4.05,
(b) perubahan hampir dalam x jika y menyusut daripada 8 kepada 7.97.

Penyelesaian

(a) $y = x^3$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$

Apabila $x = 4$, $\delta x = 4.05 - 4 = 0.05$

dan $\frac{dy}{dx} = 3(4)^2 = 48$

Jadi, $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x = 48 \times 0.05$

$\delta y = 2.4$

Maka, perubahan hampir dalam y, iaitu δy ialah 2.4.
$\delta y > 0$ bermaksud berlakunya tokokan kecil dalam y sebanyak 2.4.

(b) Apabila $y = 8$, $x^3 = 8$

$x = 2$

$\delta y = 7.97 - 8 = -0.03$

dan $\frac{dy}{dx} = 3(2)^2 = 12$

Jadi, $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$

$-0.03 = 12 \times \delta x$

$\delta x = \frac{-0.03}{12}$

$\delta x = -0.0025$

Maka, perubahan hampir dalam x, iaitu δx ialah -0.0025.
$\delta x < 0$ bermaksud berlakunya susutan kecil dalam x sebanyak 0.0025.

Contoh 23

Diberi bahawa $y = \sqrt{x}$, cari

(a) nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 4$

(b) nilai hampir bagi $\sqrt{4.02}$

Penyelesaian

(a)
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ &= x^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Apabila $x = 4$,
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{4}} \\ &= \frac{1}{2(2)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(b) Apabila $x = 4$,
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4} \\ &= 2 \\ \delta x &= 4.02 - 4 \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}$

Menggunakan $f(x + \delta x) \approx y + \frac{dy}{dx}\delta x$

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \delta x} &\approx y + \frac{dy}{dx}\delta x \\ \sqrt{4 + 0.02} &= 2 + \frac{1}{4}(0.02) \\ \sqrt{4.02} &= 2.005 \end{aligned}$$

Maka, nilai hampir bagi $\sqrt{4.02}$ ialah 2.005.

Daripada Contoh 23, perhatikan jadual di bawah.

Peratus perubahan dalam x	Peratus perubahan dalam y
$\frac{\delta x}{x} \times 100 = \frac{4.02 - 4}{4} \times 100$ $= \frac{0.02}{4} \times 100$ $= 0.5\%$	$\frac{\delta y}{y} \times 100 = \frac{2.005 - 2}{2} \times 100$ $= \frac{0.005}{2} \times 100$ $= 0.25\%$

Secara amnya,

Jika x berubah daripada x kepada $x + \delta x$, maka
- Peratus perubahan dalam $x = \frac{\delta x}{x} \times 100\%$
- Peratus perubahan dalam $y = \frac{\delta y}{y} \times 100\%$

Jadi, jika diberi suatu fungsi, misalnya $y = 3x^2 - 2x - 3$ dan x bertambah sebanyak 2% apabila $x = 2$, bolehkah anda tentukan peratus perubahan dalam y? Ikuti Contoh 24 untuk menyelesaikan masalah seperti ini.

Kaedah Alternatif

Dalam Contoh 23, δy juga boleh ditentukan melalui kaedah penggantian.

Diberi $y = \sqrt{x}$.

Apabila $x = 4$, $y = \sqrt{4}$
$= 2$

Apabila $x = 4.02$, $y = \sqrt{4.02}$
$= 2.005$

Jadi, $\delta y = 2.005 - 2$
$= 0.005$

Maka, $\sqrt{4.02} = y + \delta y$
$= 2 + 0.005$
$= 2.005$

Contoh 24

Diberi $y = 2x^2 - 3x + 4$. Apabila $x = 2$, terdapat perubahan kecil dalam x sebanyak 3%. Dengan menggunakan konsep kalkulus, cari peratus perubahan dalam y yang sepadan.

Penyelesaian

Diberi $y = 2x^2 - 3x + 4$

Apabila $x = 2$, $y = 2(2)^2 - 3(2) + 4$

$= 6$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 3$$
$$= 4(2) - 3$$
$$= 5$$

dan $\delta x = \frac{3}{100} \times 2$

$= 0.06$

Jadi, $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$

$= 5 \times 0.06$

$= 0.3$

$$\frac{\delta y}{y} \times 100 = \frac{0.3}{6} \times 100$$
$$= 5$$

Maka, peratus perubahan dalam y yang sepadan ialah 5%.

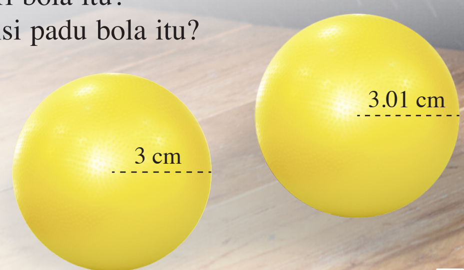
Latihan Kendiri 2.14

1. Bagi setiap fungsi berikut, cari perubahan kecil dalam y yang sepadan dengan perubahan kecil dalam x yang diberi.
   (a) $y = 4x^3 - 3x^2$, apabila x menokok daripada 1 kepada 1.05.
   (b) $y = 4\sqrt{x} + 3x^2$, apabila x menyusut daripada 4 kepada 3.98.
2. Bagi setiap fungsi berikut, cari perubahan kecil dalam x yang sepadan dengan perubahan kecil dalam y yang diberi.
   (a) $y = 2x^{\frac{3}{2}}$, apabila y menyusut daripada 16 kepada 15.7.
   (b) $y = \frac{x + 2}{2}$, apabila y menokok daripada 2 kepada $2 + p$.
3. Diberi $y = \frac{16}{x^2}$ cari nilai $\frac{dy}{dx}$ apabila $x = 2$ dan seterusnya tentukan nilai hampir bagi $\frac{16}{2.02^2}$
4. Jika $y = x^{\frac{5}{4}}$, cari peratus perubahan hampir dalam x apabila terdapat 4% perubahan dalam y.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan perubahan kecil dan penghampiran suatu kuantiti

Sebiji bola yang berbentuk sfera dengan jejari 3 cm dipamkan udara ke dalamnya. Jejari bola itu berubah sedikit daripada 3 cm kepada 3.01 cm. Bolehkah anda tentukan perubahan kecil dalam jejari bola itu? Bagaimanakah pula dengan perubahan kecil dalam isi padu bola itu?

Masalah yang melibatkan perubahan kecil seperti ini boleh diselesaikan dengan menggunakan rumus penghampiran yang telah dipelajari sebelum ini, iaitu $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$.



2.4.8 2.4.9

Contoh 25 APLIKASI MATEMATIK

Cari perubahan kecil dalam isi padu, I cm^3, sebiji bola kaca yang berbentuk sfera apabila jejarinya, j cm, bertambah daripada 3 cm kepada 3.02 cm.

Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Jejari, j sebiji bola kaca berubah daripada 3 cm kepada 3.02 cm.
- Cari perubahan kecil dalam isi padu, I bola kaca itu.

2 . Merancang strategi

- Cari nilai bagi $\frac{dI}{dj}$ apabila $j = 3$ cm.
- Gunakan rumus $\delta I \approx \frac{dI}{dj} \times \delta j$.

3 . Melaksanakan strategi

Katakan I cm^3 dan j cm masing-masing ialah isi padu dan jejari bola kaca itu.

Jadi, $I = \frac{4}{3}\pi j^3$

$\frac{dI}{dj} = 4\pi j^2$

Apabila $j = 3$, $\delta j = 3.02 - 3$
$= 0.02$

dan $\frac{dI}{dj} = 4\pi(3)^2$
$= 36\pi$

Oleh itu, $\delta I \approx \frac{dI}{dj} \times \delta j$
$= 36\pi \times 0.02$
$\delta I = 2.262$

Maka, perubahan kecil dalam isi padu bola kaca itu ialah 2.262 cm^3.

4 . Membuat refleksi

Apabila $j = 3$ cm,
$I = \frac{4}{3}\pi(3)^3$
$I = 113.0973$ cm^3

Apabila $j = 3.02$ cm,
$I = \frac{4}{3}\pi(3.02)^3$
$I = 115.3744$ cm^3

Perubahan isi padu bola kaca
$= 115.3744 - 113.0973$
$= 2.277$

Maka, perubahan isi padu bola kaca itu ialah 2.277 cm^3.

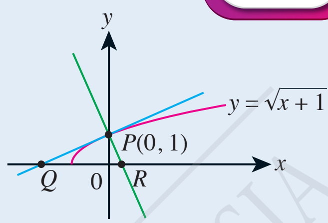
Latihan Kendiri 2.15

1. Tempoh ayunan, T saat, bagi suatu bandul dengan panjang l cm diberi oleh $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$. Cari perubahan hampir dalam T apabila l menokok daripada 9 cm kepada 9.05 cm.
2. Luas tompokan minyak yang berbentuk bulatan bertambah dari 4π cm^2 kepada 4.01π cm^2. Cari perubahan kecil yang sepadan dalam jejari tompokan minyak itu.
3. Panjang sisi sebuah kubus ialah x cm. Cari perubahan kecil dalam isi padu kubus itu apabila setiap sisinya menyusut daripada 2 cm kepada 1.99 cm.
4. Cari perubahan kecil dalam isi padu sebuah sfera apabila jejarinya menyusut daripada 5 cm kepada 4.98 cm.

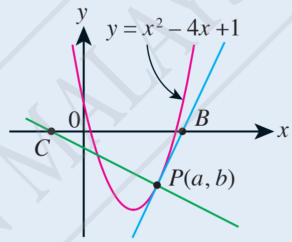
Latihan Formatif 2.4

Kuiz bit.ly/2PbDTre

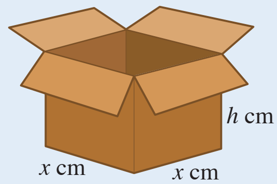
1. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = \sqrt{x+1}$. Tangen dan normal kepada lengkung itu pada titik $P(0, 1)$ masing-masing menyilang paksi-x di Q dan R. Cari
(a) persamaan tangen dan koordinat Q,
(b) persamaan normal dan koordinat R,
(c) luas, dalam unit², segi tiga PQR.



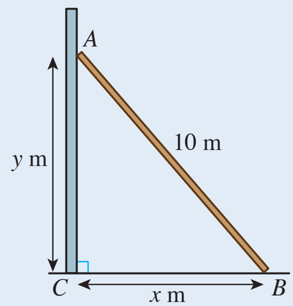
2. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = x^2 - 4x + 1$ dengan garis tangen dan normal pada titik $P(a, b)$. Garis tangen itu berserenjang dengan garis $2y = 4 - x$ dan bertemu paksi-x di B. Garis normal pula bertemu paksi-x di C. Cari
(a) nilai a dan nilai b,
(b) persamaan tangen pada titik P dan koordinat B,
(c) persamaan normal pada titik P dan koordinat C,
(d) luas, dalam unit², segi tiga BPC.



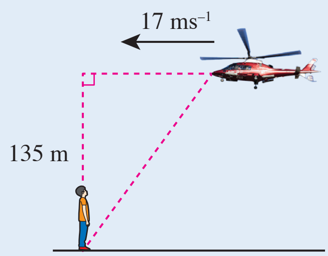
3. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kotak terbuka dengan tapak berbentuk segi empat sama bersisi x cm dan tinggi h cm. Kotak itu diperbuat daripada kepingan kadbod dengan luas 75 cm².
(a) Tunjukkan bahawa isi padu kotak, V cm³, diberi oleh
$$V = \frac{1}{4}(75x - x^3).$$
(b) Cari nilai x dengan keadaan V adalah maksimum dan juga isi padu maksimum kotak itu.



4. Rajah di sebelah menunjukkan sebatang kayu AB dengan panjang 10 m disandarkan pada dinding sebuah bangunan. Hujung kayu A ialah y m dari atas lantai dan hujung kayu B pula ialah x m dari kaki dinding C. Cari
(a) kadar perubahan hujung kayu A jika hujung kayu B menggelongsor menjauhi dinding pada kadar 3 ms^{-1} apabila $x = 8$ m,
(b) kadar perubahan hujung kayu B jika hujung kayu A menggelongsor ke bawah pada kadar 2 ms^{-1} apabila $y = 6$ m.



5. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah helikopter yang berada pada ketinggian 135 m dari permukaan tanah. Helikopter itu bergerak secara mengufuk ke arah budak lelaki dengan kadar 17 ms^{-1}. Cari kadar perubahan jarak antara helikopter dengan budak lelaki itu apabila jarak mengufuk antara helikopter dengan budak lelaki itu ialah 72 m.



SUDUT REFLEKSI

PEMBEZAAN

Idea had: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ (had)

Pembezaan dengan prinsip pertama

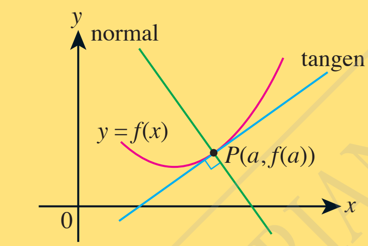
Jika $y = f(x)$, maka $\dfrac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{had}} \dfrac{\delta y}{\delta x}$, dengan δy ialah perubahan kecil dalam y dan δx ialah perubahan kecil dalam x.

Rumus pembezaan

- Jika $y = ax^n$, dengan a ialah pemalar dan n ialah integer, maka $\dfrac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$.
- Jika y ialah fungsi bagi u dan u ialah fungsi bagi x, maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$ (Petua rantai)
- Jika u dan v ialah fungsi bagi x, maka
  $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$ (Petua hasil darab)
  $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$ (Petua hasil bahagi)

Aplikasi

Tangen dan normal



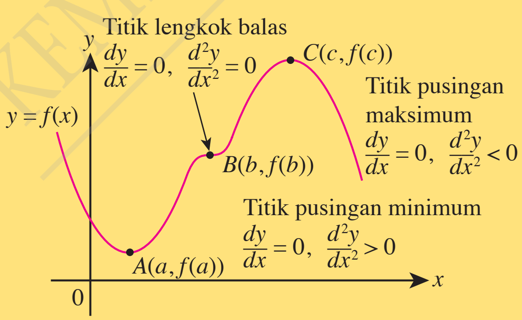
- Tangen: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$
- Normal: $y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$

Kadar perubahan yang terhubung

Jika dua pemboleh ubah yang terhubung x dan y berubah dengan masa, t, maka

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

Titik pegun bagi lengkung $y = f(x)$



Perubahan kecil dan penghampiran

Jika $y = f(x)$ dan perubahan kecil dalam x, iaitu δx menyebabkan perubahan kecil dalam y, iaitu δy, maka

$$\frac{\delta y}{\delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

$$\delta y \approx \frac{dy}{dx} \times \delta x$$

dan $f(x + \delta x) \approx y + \delta y$

$$\approx y + \frac{dy}{dx}(\delta x)$$

Penulisan Jurnal

1. Bandingkan kaedah pembezaan peringkat pertama bagi suatu fungsi $y = f(x)$ dengan menggunakan petua rantai, petua hasil darab dan petua hasil bahagi.
2. Ujian lakaran tangen dan ujian pembezaan peringkat kedua digunakan untuk menentukan sifat bagi titik-titik pusingan. Dengan menggunakan contoh yang bersesuaian, bincangkan kebaikan dan kelemahan kedua-dua ujian itu.
3. Persembahkan empat aplikasi pembezaan dalam satu folio digital dan paparkan hasilnya di hadapan kelas.

Latihan Sumatif

1. Selesaikan setiap had yang berikut. TP 2

   (a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{8 + 2x - x^2}{8 - 2x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to k} \dfrac{9 - x^2}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = 8$

2. Diberi bahawa $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{a - 5}{x + 4} = -3$, cari nilai bagi pemalar a. TP 2

3. Bezakan setiap yang berikut terhadap x. TP 2

   (a) $\dfrac{1}{2x + 1}$ (b) $4x(2x - 1)^5$ (c) $\dfrac{6}{(2 - x)^2}$ (d) $x\sqrt{x + 3}$

4. Diberi $y = x(3 - x)$. TP 2

   (a) Ungkapkan $y\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 12$ dalam sebutan x yang paling ringkas.

   (b) Seterusnya, cari nilai x yang memuaskan $y\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 12 = 0$.

5. Kecerunan lengkung $y = ax + \dfrac{b}{x^2}$ pada titik $\left(-1, -\dfrac{7}{2}\right)$ ialah 2. Cari nilai a dan nilai b. TP 3

6. Isi padu sebuah sfera bertambah dengan kadar tetap 20π cm^{3}s^{-1}. Cari jejari sfera itu pada ketika jejari bertambah dengan kadar 0.2 cms^{-1}. TP 2

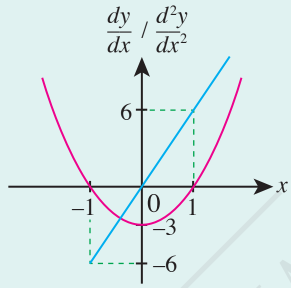
7. Diberi $y = \dfrac{14}{\sqrt{6x^3 + 1}}$, cari TP 3

   (a) perubahan hampir dalam y apabila x menokok daripada 2 kepada 2.05,
   (b) nilai hampir bagi y apabila $x = 2.05$.

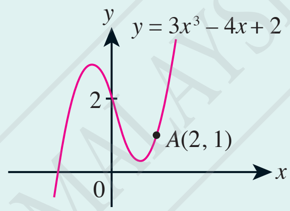
8. Diberi $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, cari peratus perubahan hampir dalam y apabila x berubah daripada 4 sebanyak 2%. TP 3

9. Diberi $y = 3x^2 - 4x + 6$ dan terdapat tokokan kecil dalam x sebanyak p% apabila $x = 2$. Cari peratus perubahan dalam y yang sepadan. TP 3

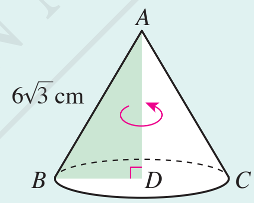
10. Rajah di sebelah menunjukkan graf $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ bagi fungsi $y = f(x)$. Diberi bahawa fungsi $y = f(x)$ melalui titik $(-1, 6)$ dan $(1, 2)$. Tanpa perlu mencari persamaan bagi fungsi $y = f(x)$, TP 4
(a) tentukan koordinat titik maksimum dan titik minimum bagi graf fungsi $y = f(x)$,
(b) lakarkan graf bagi fungsi $y = f(x)$.



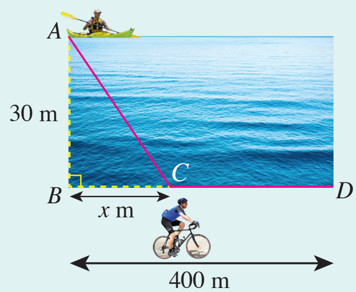
11. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 3x^3 - 4x + 2$. Cari TP 3
(a) persamaan tangen kepada lengkung pada titik $A(2, 1)$,
(b) koordinat titik lain pada lengkung itu dengan keadaan tangennya adalah selari dengan tangen pada titik A.



12. Dalam rajah di sebelah, ΔADB ialah sebuah segi tiga tegak dengan panjang hipotenusnya ialah $6\sqrt{3}$ cm. Segi tiga itu diputarkan pada AD untuk membentuk sebuah kon tegak ABC. Cari TP 4
(a) tinggi, (b) isi padu kon itu,
dengan keadaan isi padu yang dijanakan adalah maksimum.

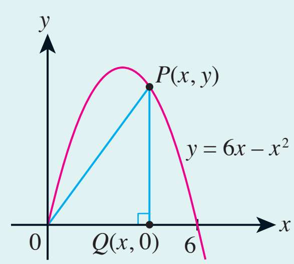


13. Dalam rajah di sebelah, Mukhriz mendayung sebuah kayak dari titik A yang berada 30 m jauhnya dari titik terdekat B di tepi pantai lurus BD ke titik C yang berada x m dari titik B. Kemudian, dia berbasikal dari titik C ke titik D yang jauhnya 400 m dari titik B dalam masa terpantas yang mungkin. Cari jarak dari B ke C, jika dia mendayung pada halaju 40 mmin^{-1} dan berbasikal pada halaju 50 mmin^{-1}. TP 5



14. Sebuah kubus mengembang dengan keadaan sisi-sisinya berubah pada kadar 2 cms^{-1}. Cari kadar perubahan jumlah luas permukaan kubus itu apabila isi padunya ialah 8 cm^3. TP 3

15. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 6x - x^2$ yang melalui asalan dan titik $P(x, y)$. TP 3
(a) Jika Q ialah titik $(x, 0)$, tunjukkan bahawa luas, A bagi segi tiga POQ diberi oleh $A = \frac{1}{2}(6x^2 - x^3)$.
(b) Diberi bahawa x menokok dengan kadar 2 unit per saat, cari
 (i) kadar tokokan bagi A apabila $x = 2$,
 (ii) kadar susutan bagi A apabila $x = 5$.



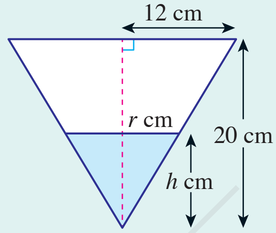
16. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah bekas berbentuk kon terbalik dengan jejari 12 cm dan tinggi 20 cm. TP 6

(a) Jika tinggi air di dalam bekas itu ialah h cm, tunjukkan bahawa isi padu air, V cm^3, di dalam bekas itu diberi oleh $V = \frac{3}{25}\pi h^3$.

(b) Air mengalir keluar melalui lubang di hujung bekas,

(i) cari perubahan kecil dalam isi padu air apabila h menyusut daripada 5 cm kepada 4.99 cm,

(ii) tunjukkan bahawa susutan kecil sebanyak $p\%$ dalam tinggi air itu akan menyebabkan susutan sebanyak $3p\%$ dalam isi padu.



EKSPLORASI MATEMATIK

Sebuah syarikat minuman multinasional mengadakan satu pertandingan mereka bentuk tin minuman bagi produk terbaharu syarikat, iaitu minuman berperisa kelapa.

PERTANDINGAN MEREKA BENTUK TIN MINUMAN

Kriteria-kriteria bagi rekaan tin minuman adalah seperti yang berikut:

- Kapasiti tin minuman ialah 550 cm^3.
- Bentuk tin minuman yang perlu dipertimbangkan adalah seperti silinder, kon, piramid, prisma, kubus atau kuboid sahaja. Bentuk sfera adalah dilarang.
- Bahan yang digunakan untuk menghasilkan tin minuman mestilah minimum.
- Tin minuman mestilah unik dan menarik.

Hadiah menarik menanti anda!

Sertai pertandingan tersebut bersama-sama rakan sekelas anda dengan berpandukan kriteria yang diberikan dan ikuti langkah-langkah yang berikut:

1. Reka tiga bentuk bekas tin minuman yang mungkin.
2. Bagi setiap bentuk yang berkapasiti 550 cm^3, tunjukkan ukuran bekas itu dengan luas permukaannya adalah minimum. Seterusnya, nyatakan luas permukaan minimum itu.
3. Pilih dan cadangkan satu rekaan terbaik untuk pertandingan itu dengan menyenaraikan kelebihan rekaan tersebut.