BAB 3 PENGAMIRAN

Apakah yang akan dipelajari?

- Pengamiran sebagai Songsangan Pembezaan
- Kamiran Tak Tentu
- Kamiran Tentu
- Aplikasi Pengamiran

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/38Z18g9

Pernahkah anda melihat bangunan yang bercirikan teknologi binaan mesra alam? Penggunaan kaca pada dinding sesebuah bangunan dapat memaksimumkan tenaga cahaya bagi mengurangkan penggunaan tenaga elektrik. Tahukah anda bahawa pengetahuan mengenai pengamiran adalah penting dalam menganalisis struktur bangunan? Seorang jurutera perlu mengaplikasikan pengetahuan tersebut semasa mereka bentuk struktur suatu bangunan. Hal ini adalah untuk memastikan bangunan itu teguh dan mempunyai daya tahan terhadap tiupan angin kencang dan juga getaran gempa bumi pada tahap tertentu.

Sudut Maklumat

Bonaventura Cavalieri merupakan seorang ahli matematik Itali yang terawal dalam memperkenalkan konsep pengamiran. Teori beliau dalam konsep tidak terbahagikan (*indivisibles*) diguna pakai untuk mencari luas di bawah suatu lengkung.

Pada tahun 1656, John Wallis dari England pula telah memantapkan asas pengamiran sedia ada dengan memperkenalkan konsep had secara rasmi.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/35O7k8x

Kepentingan Bab Ini

- Dalam kejuruteraan hidrologi, jurutera menggunakan pengamiran untuk menentukan isi padu dalam suatu sistem hidrologi berdasarkan luas di bawah suatu lengkung dengan masa.
- Dalam kejuruteraan awam, jurutera menggunakan pengamiran untuk mengira pusat jisim bagi suatu bentuk yang tidak sekata.
- Kriteria Kecederaan Kepala (HIC) yang mengaplikasikan pengamiran digunakan bagi menentukan nilai risiko kecederaan kepala dalam suatu perlanggaran.

Kata Kunci

Pembezaan	*Differentiation*
Pengamiran	*Integration*
Fungsi kecerunan	*Gradient function*
Persamaan lengkung	*Equation of curve*
Kamiran tak tentu	*Indefinite integral*
Kamiran tentu	*Definite integral*
Pengamiran melalui penggantian	*Integration by substitution*
Rantau	*Region*
Isi padu kisaran	*Volume of revolution*

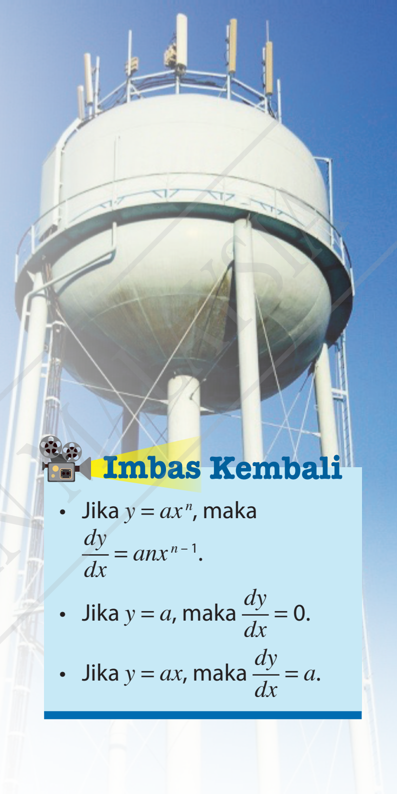
Video mengenai bangunan mesra alam.

bit.ly/2MllaaG

3.1 Pengamiran sebagai Songsangan Pembezaan

Gambar di sebelah menunjukkan sebuah tangki air yang dipasang di sebuah kilang. Kadar air yang mengalir keluar dari tangki tersebut boleh diwakili oleh $\frac{dV}{dt} = 5t + 2$, dengan keadaan V ialah isi padu air, dalam m^3, dan t ialah masa, dalam jam. Air di dalam tangki tersebut akan habis digunakan dalam masa 5 jam.

Dengan berpandukan kadar air yang mengalir keluar dari tangki tersebut, bagaimanakah anda boleh menentukan isi padu air dalam tangki itu pada suatu masa tertentu?



Perkaitan antara pembezaan dengan pengamiran

Anda telah mempelajari kaedah untuk mencari pembezaan bagi suatu fungsi $y = f(x)$. Pertimbangkan fungsi $y = 3x^2 + 4x + 5$, maka kita peroleh $\frac{dy}{dx} = 6x + 4$.

Pengamiran ialah suatu proses yang hampir sama dengan pembezaan tetapi proses ini diwakilkan dengan tatatanda $\int \ldots\ dx$. Apakah hubungan antara pembezaan dengan pengamiran? Mari teroka dengan lebih lanjut lagi.

Imbas Kembali

- Jika $y = ax^n$, maka $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$.
- Jika $y = a$, maka $\frac{dy}{dx} = 0$.
- Jika $y = ax$, maka $\frac{dy}{dx} = a$.

Aktiviti Penerokaan 1 — Berpasangan | PAK-21 | STEM | PK

Tujuan: Mengenal pasti hubungan antara pembezaan dengan pengamiran

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik butang fungsi dan perhatikan graf yang terbentuk.
3. Bersama-sama pasangan anda, bincangkan:
   (a) hubungan antara graf fungsi $f(x)$, $f'(x)$ dan $g(x)$,
   (b) hubungan antara graf fungsi $h(x)$, $h'(x)$ dan $k(x)$,
   (c) hubungan antara graf fungsi $m(x)$, $m'(x)$ dan $n(x)$.
4. Kemudian, bentangkan hasil dapatan anda di hadapan kelas.
5. Ahli daripada pasangan yang lain akan bertanyakan soalan kepada anda.

ggbm.at/mggtmhhb

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 1, didapati bahawa:

- Graf fungsi $g(x) = \int f'(x)\ dx$ adalah sama dengan graf fungsi $f(x)$.
- Graf fungsi $k(x) = \int h'(x)\ dx$ adalah sama dengan graf fungsi $h(x)$.
- Graf fungsi $n(x) = \int m'(x)\ dx$ adalah sama dengan graf fungsi $m(x)$.

Oleh itu, dapat disimpulkan bahawa pengamiran ialah suatu **proses songsangan** bagi pembezaan. Fungsi $f(x)$, $h(x)$ dan $m(x)$ masing-masing dikenali sebagai **anti terbitan** bagi fungsi $g(x)$, $k(x)$ dan $n(x)$.

Pembezaan

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

$f(x)$ $\quad$ $f'(x)$

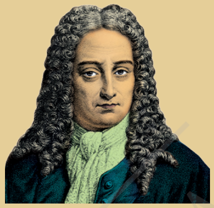
Pengamiran

$$\int f'(x)\ dx = f(x)$$

Secara amnya,

Jika $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$, maka kamiran bagi $f'(x)$ terhadap x ialah $\int f'(x)\ dx = f(x)$.

GALERI SEJARAH



Pada tahun 1675, Gottfried Wilhelm Leibniz merupakan seorang ahli matematik Jerman yang memperkenalkan simbol kamiran, iaitu $\int$. Beliau mengadaptasikan simbol kamiran daripada huruf $\int$ atau s panjang.

Contoh 1

Diberi $\frac{d}{dx}(4x^2) = 8x$, cari $\int 8x\ dx$.

Penyelesaian

Pembezaan bagi $4x^2$ ialah $8x$.
Secara songsangan, pengamiran bagi $8x$ ialah $4x^2$.
Oleh itu, $\int 8x\ dx = 4x^2$.

Kuiz Pantas

Berikan tiga contoh dalam kehidupan harian yang boleh menunjukkan bahawa pengamiran adalah songsangan bagi pembezaan.

Contoh 2

Penghasilan arang batu di sebuah kawasan perlombongan diberi oleh $K = 48\ 000t - 100t^3$, dengan keadaan K ialah jisim arang batu yang dihasilkan, dalam tan, dan t ialah masa, dalam tahun.

(a) Cari kadar penghasilan arang batu, $\frac{dK}{dt}$, dalam sebutan t.

(b) Jika kadar penghasilan arang batu berubah kepada $\frac{dK}{dt} = 96\ 000 - 600t^2$, hitung jisim arang batu yang dihasilkan, dalam tan, pada tahun ke-4.

BAB 3

Penyelesaian

(a) Diberi $K = 48\ 000t - 100t^3$.

Maka, $\dfrac{dK}{dt} = 48\ 000 - 300t^2$.

(b) Diberi $\dfrac{dK}{dt} = 96\ 000 - 600t^2$

$= 2(48\ 000 - 300t^2)$

Secara songsangan, pengamiran bagi $48\ 000 - 300t^2$ ialah $48\ 000t - 100t^3$.

Oleh itu, $\int 2(48\ 000 - 300t^2)\ dt = 2(48\ 000t - 100t^3)$

$= 96\ 000t - 200t^3$

Maka, jisim arang batu yang dihasilkan pada tahun ke-4 $= 96\ 000(4) - 200(4)^3$

$= 371\ 200$ tan

Latihan Kendiri 3.1

1. Diberi $\dfrac{d}{dx}(5x^3 + 4x) = 15x^2 + 4$, cari $\int (15x^2 + 4)\ dx$.
2. Diberi $\dfrac{d}{dx}(8x^3) = 24x^2$, cari $\int 24x^2\ dx$.
3. Penggunaan air di sebuah pusat beli-belah A boleh diwakili oleh fungsi $J = 100t^3 + 30t^2$, dengan keadaan J ialah isi padu air yang digunakan, dalam liter, dan t ialah masa, dalam hari.
   (a) Cari kadar penggunaan air bagi pusat beli-belah A, dalam sebutan t.
   (b) Jika kadar penggunaan air bagi pusat beli-belah A berubah kepada $\dfrac{dJ}{dt} = 1\ 500t^2 + 300t$, cari isi padu air, dalam liter, yang digunakan pada hari kedua.

Latihan Formatif 3.1

Kuiz bit.ly/2rGLiWM

1. Diberi $y = 3(2x + 2)^3$, cari $\dfrac{dy}{dx}$. Seterusnya, cari $\int [18(2x + 2)^2]\ dx$.
2. Diberi $f(x) = \dfrac{5x + 2}{2 - 3x}$, cari $f'(x)$ dan $\int f'(x)\ dx$.
3. Diberi $y = 5(x + 2)^3$ dan $\dfrac{dy}{dx} = h(x + 2)^k$, cari nilai $h + k$. Seterusnya, cari nilai bagi $\dfrac{1}{10}\int \left(\dfrac{dy}{dx}\right) dx$ dengan keadaan $x = 2$.
4. Diberi $f(x) = 3x(2x + 1)^2$ dan $\int (12x^2 + 8x + 1)\ dx = af(x)$, cari nilai a.
5. Fungsi keuntungan harian daripada jualan tiket bas bagi sebuah syarikat K diberi oleh $A = 100t^2 + 50t^3$, dengan keadaan A ialah keuntungan yang diperoleh, dalam RM, dan t ialah masa, dalam hari.
   (a) Kira kadar keuntungan jualan tiket bas yang diperoleh syarikat itu selepas 5 hari.
   (b) Diberi kadar keuntungan jualan tiket bas bagi sebuah syarikat H ialah $\dfrac{dA}{dt} = 30t^2 + 40t$, syarikat manakah yang memperoleh keuntungan paling tinggi pada hari ke-10?

3.2 Kamiran Tak Tentu

Gambar di sebelah menunjukkan ahli Kelab Doktor Muda sebuah sekolah yang sedang mengukur tekanan darah rakannya. Bagaimanakah cara untuk menentukan tekanan darah dalam aorta, t saat selepas satu denyutan bagi seorang dewasa normal?

Dengan menggunakan **kamiran tak tentu** terhadap fungsi kadar tekanan darah, kita boleh menentukan tekanan darah seseorang.

Rumus kamiran tak tentu

Aktiviti Penerokaan 2 — Berpasangan — PAK-21

Tujuan: Menerbitkan rumus kamiran tak tentu secara induktif

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Lengkapkan jadual bagi Kes 1 secara bergilir-gilir dengan rakan sepasangan anda.
3. Berdasarkan jadual tersebut, terbitkan rumus kamiran tak tentu secara induktif.
4. Ulang langkah 2 dan 3 bagi Kes 2.
5. Pamerkan hasil kerja anda dan rakan sepasangan anda di dalam kelas.
6. Anda dan rakan sepasangan akan bergerak untuk melihat hasil kerja pasangan lain.

bit.ly/35s352i

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 2, didapati bahawa:

- Bagi suatu pemalar a,

$\int a \, dx = ax + c$, dengan keadaan a dan c ialah pemalar.

- Bagi suatu fungsi ax^n,

$\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$, dengan keadaan a dan c ialah pemalar, n ialah integer dan $n \neq -1$.

Secara amnya, fungsi $ax + c$ dan $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$ dikenali sebagai **kamiran tak tentu** masing-masing bagi pemalar a terhadap x dan fungsi ax^n terhadap x.

Tip Pintar

Langkah-langkah untuk mencari kamiran ax^n terhadap x, dengan keadaan a ialah pemalar, n ialah integer dan $n \neq -1$:
1. Tambahkan indeks bagi x dengan 1.
2. Bahagikan sebutan dengan indeks baharu.
3. Tambahkan pemalar c dengan hasil kamiran.

Perhatikan setiap kes yang berikut.

Kes 1

$y = 5x$, $\frac{dy}{dx} = 5$ dan

$\int 5 \, dx = 5x$

Kes 2

$y = 5x + 2$, $\frac{dy}{dx} = 5$ dan

$\int 5 \, dx = 5x + 2$

Kes 3

$y = 5x - 3$, $\frac{dy}{dx} = 5$ dan

$\int 5 \, dx = 5x - 3$

3.2.1

Daripada ketiga-tiga kes tersebut, didapati bahawa nilai $\frac{dy}{dx}$ bagi setiap kes adalah sama, tetapi sebutan pemalar dalam hasil kamiran tak tentu adalah berbeza. Pemalar ini dikenali sebagai **pemalar pengamiran** dan biasanya diwakili dengan simbol c. Pemalar c akan ditambah sebagai sebahagian daripada kamiran tak tentu bagi suatu fungsi. Misalnya, $\int 5\, dx = 5x + c$.

Kamiran tak tentu bagi suatu fungsi algebra

Rumus kamiran tak tentu akan digunakan untuk mencari kamiran tak tentu bagi suatu pemalar atau fungsi algebra.

Contoh 3

Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) 12 (b) $\frac{1}{2}$ (c) -0.5

Penyelesaian

(a) $\int 12\, dx = 12x + c$

(b) $\int \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}x + c$

(c) $\int -0.5\, dx = -0.5x + c$

Contoh 4

Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int x^3\, dx$ (b) $\int \frac{2}{x^2}\, dx$

Penyelesaian

(a) $$\int x^3\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$$

(b) $$\int \frac{2}{x^2}\, dx = 2\int x^{-2}\, dx = 2\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + c = -2x^{-1} + c = -\frac{2}{x} + c$$

Tip Pintar

$\int ax^n\, dx = a\int x^n\, dx$

Kuiz Pantas

Cari kamiran bagi setiap yang berikut.

(a) $\int dx$

(b) $\int 0\, dx$

(c) $\int |x|\, dx$

Dalam bab pembezaan, anda telah mempelajari kaedah untuk mencari pembezaan bagi suatu fungsi yang berbentuk seperti $h(x) = 3x^2 + 5x$, dengan keadaan $f(x) = 3x^2$ dan $g(x) = 5x$.

Kaedah yang serupa boleh digunakan untuk mencari kamiran bagi suatu fungsi yang melibatkan penambahan atau penolakan sebutan-sebutan algebra.

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ ialah suatu fungsi, maka

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

Sudut Informasi

$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx$
$= \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$
juga dikenali sebagai petua penambahan atau penolakan.

Contoh 5

Cari kamiran bagi setiap yang berikut.

(a) $\int (3x^2 + 2)\ dx$ (b) $\int (x - 2)(x + 6)\ dx$ (c) $\int x^2\left(3 + \frac{1}{x^5}\right) dx$

Penyelesaian

(a) $\int (3x^2 + 2)\ dx$

$= \int 3x^2\ dx + \int 2\ dx$

$= \frac{3x^3}{3} + 2x + c$

$= x^3 + 2x + c$

(b) $\int (x - 2)(x + 6)\ dx$

$= \int (x^2 + 4x - 12)\ dx$

$= \int x^2\ dx + \int 4x\ dx - \int 12\ dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 12x + c$

$= \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 12x + c$

(c) $\int x^2\left(3 + \frac{1}{x^5}\right) dx = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

$= \int \left(3x^2 + x^{-3}\right) dx$

$= \int 3x^2\ dx + \int x^{-3}\ dx$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^{-2}}{-2} + c$

$= x^3 - \frac{1}{2x^2} + c$

PERBINCANGAN

Kamiran bagi suatu fungsi yang melibatkan penambahan dan penolakan sebutan-sebutan algebra boleh diwakilkan dengan satu pemalar pengamiran sahaja. Jelaskan.

Latihan Kendiri 3.2

1. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int 2\ dx$ (b) $\int \frac{5}{6}\ dx$ (c) $\int -2\ dx$ (d) $\int \frac{\pi}{3}\ dx$

2. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $3x^2$ (b) $\frac{4}{3}x^3$ (c) $-x$ (d) $-\frac{2}{x^2}$

(e) $\frac{3}{x^3}$ (f) $3\sqrt{x}$ (g) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ (h) $\left(-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^3$

3. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $2x + 3$ (b) $4x^2 + 5x$ (c) $\frac{1}{2}x^3 + 5x - 2$ (d) $\frac{3}{x^2} + 4x - 2$

4. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int (x + 2)(x - 4)\ dx$ (b) $\int x^2(3x^2 + 5x)\ dx$ (c) $\int \left(5x^2 - 3\sqrt{x}\right) dx$

(d) $\int (5x - 3)^2\ dx$ (e) $\int \left(\frac{5x^2 - 3x}{x}\right) dx$ (f) $\int \left(x + \sqrt{x}\right)^2 dx$

Kamiran tak tentu bagi fungsi berbentuk $(ax + b)^n$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar, n ialah integer dan $n \neq -1$

Anda telah mempelajari cara untuk mencari kamiran tak tentu bagi fungsi $y = 2x + 1$. Bagaimanakah pula cara untuk mencari kamiran bagi fungsi $y = (2x + 1)^8$?

Ungkapan $(2x + 1)^8$ adalah sangat rumit untuk dikembangkan. Jadi, fungsi seperti ini boleh diselesaikan dengan menggunakan **kaedah penggantian**.

Pertimbangkan fungsi $y = \int (ax + b)^n \, dx$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar, n ialah integer dan $n \neq -1$, maka $\frac{dy}{dx} = (ax + b)^n$.

Katakan, $u = ax + b$

Jadi, $\frac{du}{dx} = a$

dan $\frac{dy}{dx} = u^n$

Dengan menggunakan petua rantai,

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{du}$$

$$= \frac{dy}{dx} \times \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

Gantikan $\frac{dy}{dx} = u^n$ dan $\frac{du}{dx} = a$, kita peroleh

$$\frac{dy}{du} = u^n \times \frac{1}{a}$$

$$y = \int \frac{u^n}{a} \, du$$

$$\int (ax + b)^n \, dx = \int \frac{u^n}{a} \, du$$

$$= \frac{1}{a} \int u^n \, du$$

$$= \frac{1}{a} \left[\frac{u^{n+1}}{n + 1}\right] + c$$

Gantikan $u = ax + b$, kita peroleh

$$\int (ax + b)^n \, dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n + 1)} + c$$

Maka,

$\int (ax + b)^n \, dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n + 1)} + c$, dengan keadaan a dan b ialah pemalar, n ialah integer dan $n \neq -1$.

Imbas Kembali

Bagi suatu fungsi $y = g(u)$ dan $u = h(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Sudut Informasi

Ungkapan $(ax + b)^n$ dapat dikembangkan dengan menggunakan teorem Binomial. Rumus am teorem Binomial bagi ungkapan $(ax + b)^n$ ialah $\sum_{k=0}^{n} [{}^nC_k (ax)^{n-k} (b)^k]$, dengan keadaan k dan n ialah integer serta a dan b ialah pemalar.

PERBINCANGAN

Menggunakan rumus di sebelah, bolehkah anda mencari kamiran bagi $\int (3x^2 + 3)^3 \, dx$?

Contoh 6

Dengan menggunakan kaedah penggantian, cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.

(a) $\int (3x + 5)^5\ dx$ (b) $\int \sqrt{5x + 2}\ dx$

Penyelesaian

(a) Katakan $u = 3x + 5$

Jadi, $\frac{du}{dx} = 3$

$dx = \frac{du}{3}$

$$\int (3x + 5)^5\ dx = \int \frac{u^5}{3}\ du$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^6}{6}\right) + c$$
$$= \frac{(3x + 5)^6}{18} + c$$

(b) Katakan $u = 5x + 2$

Jadi, $\frac{du}{dx} = 5$

$dx = \frac{du}{5}$

$$\int \sqrt{5x + 2}\ dx = \int \frac{\sqrt{u}}{5}\ du$$
$$= \int \frac{u^{\frac{1}{2}}}{5}\ du$$
$$= \frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{15}(5x + 2)^{\frac{3}{2}} + c$$

Contoh 7

Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $(2 - 3x)^4$ (b) $\frac{3}{(5x - 3)^6}$

Penyelesaian

(a) $$\int (2 - 3x)^4\ dx = \frac{(2 - 3x)^5}{-3(5)} + c$$
$$= -\frac{(2 - 3x)^5}{15} + c$$

(b) $$\int \frac{3}{(5x - 3)^6}\ dx = \int 3(5x - 3)^{-6}\ dx$$
$$= \frac{3(5x - 3)^{-5}}{5(-5)} + c$$
$$= -\frac{3}{25(5x - 3)^5} + c$$

Latihan Kendiri 3.3

1. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut dengan menggunakan kaedah penggantian.

(a) $\int (x - 3)^2\ dx$ (b) $\int (3x - 5)^9\ dx$ (c) $\int 4(5x - 2)^5\ dx$

(d) $\int \frac{(7x - 3)^4}{3}\ dx$ (e) $\int \frac{12}{(2x - 6)^3}\ dx$ (f) $\int \frac{2}{3(3x - 2)^2}\ dx$

2. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.

(a) $(4x + 5)^4$ (b) $2(3x - 2)^3$ (c) $(5x - 11)^4$

(d) $\frac{(3x - 2)^5}{5}$ (e) $\frac{5}{(6x - 3)^6}$ (f) $\frac{12}{(3x - 5)^8}$

Persamaan lengkung daripada fungsi kecerunan

Nilai pemalar pengamiran, c boleh ditentukan dengan menggantikan nilai x dan y yang sepadan ke dalam hasil pengamiran suatu fungsi kecerunan.

Contoh 8

Tentukan nilai pemalar pengamiran, c bagi $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 3$ dengan $y = 25$ apabila $x = 2$.

Penyelesaian

Diberi $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 3$.

Jadi, $y = \int (4x^3 + 6x^2 - 3)\, dx$

$$y = \frac{4x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 3x + c$$

$$y = x^4 + 2x^3 - 3x + c$$

Apabila $x = 2$ dan $y = 25$,

$$25 = 2^4 + 2(2)^3 - 3(2) + c$$

$$c = -1$$

Maka, nilai pemalar pengamiran, c bagi $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 3$ ialah -1.

Fungsi kecerunan, $\frac{dy}{dx}$ atau $f'(x)$ bagi suatu lengkung boleh ditentukan dengan melakukan pembezaan terhadap persamaan lengkung $y = f(x)$. Sebaliknya, persamaan bagi suatu lengkung boleh diperoleh daripada pengamiran fungsi kecerunannya. Secara amnya,

> Diberi suatu fungsi kecerunan $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, maka persamaan lengkung bagi fungsi itu ialah $y = \int f'(x)\, dx$.

Contoh 9

Kecerunan bagi suatu lengkung pada titik (x, y) ialah $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 4x - 3$.

(a) Jika lengkung itu melalui titik $(-1, 2)$, cari persamaan lengkung itu.

(b) Seterusnya, cari nilai y apabila $x = 1$.

Penyelesaian

(a) Diberi $\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 4x - 3$.

Jadi, $y = \int (15x^2 + 4x - 3)\, dx$

$$y = 5x^3 + 2x^2 - 3x + c$$

Apabila $x = -1$ dan $y = 2$,

$$2 = 5(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) + c$$

$$c = 2$$

Maka, persamaan lengkung itu ialah $y = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 2$.

(b) Apabila $x = 1$,

$$y = 5(1)^3 + 2(1)^2 - 3(1) + 2$$

$$y = 6$$

Maka, $y = 6$ apabila $x = 1$.

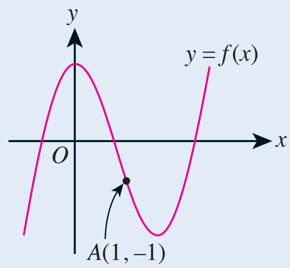
Latihan Kendiri 3.4

1. Cari nilai pemalar pengamiran, c bagi fungsi kecerunan yang berikut.
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 2$, $y = 7$ apabila $x = -1$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = -6x - \dfrac{6}{x^3}$, $y = 6$ apabila $x = -1$
2. Diberi $\dfrac{dy}{dx} = 20x^3 - 6x^2 - 6$ dan $y = 2$ apabila $x = 1$. Cari nilai y apabila $x = \dfrac{1}{2}$.
3. Cari persamaan lengkung bagi setiap fungsi kecerunan yang melalui titik berikut.
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = 9x^2 - 2$, titik $(1, 6)$
   (b) $\dfrac{dy}{dx} = 10x - 2$, titik $(2, 13)$
   (c) $\dfrac{dy}{dx} = 24x^2 - 5$, titik $(1, 1)$
   (d) $\dfrac{dy}{dx} = 18x^2 + 10x$, titik $(-2, -10)$

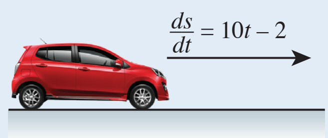
Latihan Formatif 3.2

Kuiz bit.ly/35pBrmA

1. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut.
   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{2}\, dx$
   (b) $\displaystyle\int \frac{5}{3x^3}\, dx$
   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$
   (d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right) dx$
2. Kamirkan setiap yang berikut terhadap x.
   (a) $\dfrac{5x^2 - 3x^3}{x}$
   (b) $\dfrac{6x^3 + 2x^2}{2x^2}$
   (c) $(5 - 6x)^3$
   (d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5 - 2x}}$
3. Diberi $\dfrac{dy}{dx} = 10x + \dfrac{p}{x^2}$, dengan keadaan p ialah pemalar. Jika $\dfrac{dy}{dx} = 20\dfrac{1}{2}$ dan $y = 19$ apabila $x = 2$, cari nilai p. Seterusnya, cari nilai y apabila $x = -2$.
4. (a) Diberi $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - 15x^2 + 6$ dan $y = -20$ apabila $x = 3$, cari nilai y apabila $x = -2$.
   (b) Diberi $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 2$ dan $y = 2$ apabila $x = 2$. Cari nilai-nilai x apabila $y = -6$.
5. Rajah di sebelah menunjukkan suatu lengkung yang melalui titik $A(1, -1)$. Diberi fungsi kecerunan bagi lengkung tersebut ialah $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$, cari persamaan bagi lengkung itu.



6. Diberi kecerunan normal bagi suatu lengkung pada satu titik ialah $\dfrac{1}{6x - 2}$. Jika lengkung itu melalui titik $(2, 2)$, cari persamaan bagi lengkung tersebut.
7. Diberi fungsi kecerunan bagi suatu lengkung ialah $ax + b$. Kecerunan lengkung pada titik $(-2, 8)$ ialah -7 dan kecerunan lengkung pada titik $(0, 6)$ ialah 5. Cari nilai a dan nilai b. Seterusnya, cari persamaan bagi lengkung tersebut.
8. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah kereta yang dipandu di sebuah jalan raya yang lurus. Diberi fungsi perubahan sesaran bagi kereta tersebut ialah $\dfrac{ds}{dt} = 10t - 2$ dan $s = 8$ m apabila $t = 1$ s. Cari sesaran, dalam m, apabila $t = 3$ s.



3.2.4

3.3 Kamiran Tentu

Empangan Hidroelektrik Bakun di Sarawak merupakan sebuah stesen jana kuasa hidroelektrik terbesar di Malaysia. Bagaimanakah jurutera-jurutera pembinaan dapat memastikan empangan yang dibina mempunyai ciri-ciri keselamatan yang baik?

Dengan mengaplikasikan kamiran tentu, jurutera-jurutera dapat menentukan luas permukaan dan isi padu air dalam kawasan takungan empangan. Hal ini membolehkan mereka menentukan ketebalan dinding empangan yang perlu dibina bagi menampung tekanan air dalam takungan tersebut.

Nilai kamiran tentu bagi suatu fungsi algebra

Anda telah mempelajari bahawa kamiran tak tentu bagi suatu fungsi $f(x)$ terhadap x ialah $\int f(x)\, dx = g(x) + c$, dengan keadaan $g(x)$ ialah suatu fungsi x dan c ialah pemalar.

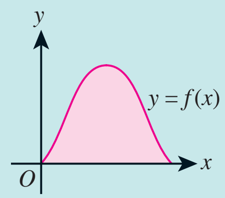
Kamiran tentu bagi suatu fungsi $f(x)$ terhadap x antara nilai batasan $x = a$ dengan $x = b$ pula boleh ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, dx &= \left[g(x) + c\right]_a^b \\ &= [g(b) + c] - [g(a) + c] \\ &= g(b) - g(a)\end{aligned}$$

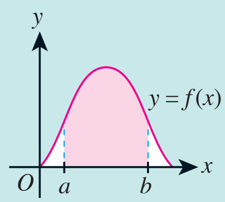
Sudut Informasi

Luas di bawah suatu lengkung boleh ditentukan melalui pengamiran fungsi lengkung itu. Bagi suatu fungsi $y = f(x)$:

(a) Kamiran tak tentu, $\int f(x)\, dx$



(b) Kamiran tentu, $\int_a^b f(x)\, dx$



Contoh 10

Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_2^3 x^2\, dx$ (b) $\int_{-1}^4 (3x^2 + 2x)\, dx$

Penyelesaian

(a) $\int_2^3 x^2\, dx$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 \\ &= \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} \\ &= \frac{19}{3}\end{aligned}$$

(b) $\int_{-1}^4 (3x^2 + 2x)\, dx$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^4 \\ &= \left[x^3 + x^2\right]_{-1}^4 \\ &= [4^3 + 4^2] - [(-1)^3 + (-1)^2] \\ &= 80\end{aligned}$$

Kuiz Pantas

Cari nilai bagi

(a) $\int_1^2 1\, dx$

(b) $\int_1^2 0\, dx$

Contoh 11

Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_1^2 \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2}\right) dx$ (b) $\int_2^4 (2x - 5)^4\, dx$

Penyelesaian

(a) $\int_1^2 \left(\frac{x^3 - 2x^2}{x^2}\right) dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{2x^2}{x^2}\right) dx$

$= \int_1^2 (x - 2)\, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2$

$= \left[\frac{2^2}{2} - 2(2)\right] - \left[\frac{1^2}{2} - 2(1)\right]$

$= -2 - \left(-\frac{3}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2}$

(b) $\int_2^4 (2x - 5)^4\, dx$

$= \left[\frac{(2x - 5)^5}{2(5)}\right]_2^4$

$= \left[\frac{(2(4) - 5)^5}{10}\right] - \left[\frac{(2(2) - 5)^5}{10}\right]$

$= \frac{243}{10} - \left(-\frac{1}{10}\right)$

$= \frac{122}{5}$

Apakah sifat-sifat bagi kamiran tentu? Untuk mengetahui dengan lebih lanjut, mari ikuti penerokaan yang berikut.

Aktiviti Penerokaan 3

Berkumpulan PAK-21 STEM PK

Tujuan: Mengenal pasti sifat-sifat bagi kamiran tentu

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Klik pada semua petak untuk memaparkan rantau bagi setiap kamiran tentu itu.
3. Perhatikan rantau yang terbentuk dan catatkan nilai bagi setiap kamiran tentu itu pada sehelai kertas.
4. Kemudian, padankan setiap yang berikut dengan jawapan yang betul.

ggbm.at/mqsxgymf

$\int_2^2 3x^2\, dx$	$\int_1^6 3x^2\, dx$
$\int_2^6 3x^2\, dx$	$3\int_2^6 3x^2\, dx$
$\int_2^6 3(3x^2)\, dx$	$\int_2^6 3x^2\, dx + \int_2^6 6x\, dx$
$\int_1^4 3x^2\, dx + \int_4^6 3x^2\, dx$	$-\int_6^2 3x^2\, dx$
$\int_2^6 (3x^2 + 6x)\, dx$	0

5. Buat satu kesimpulan umum secara deduktif bagi setiap hasil yang diperoleh.
6. Setiap kumpulan melantik seorang wakil untuk membuat pembentangan mengenai hasil dapatan masing-masing di hadapan kelas.
7. Ahli daripada kumpulan yang lain boleh bertanyakan soalan kepada wakil kumpulan.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 3, sifat-sifat bagi kamiran tentu adalah seperti berikut:

Bagi suatu fungsi $f(x)$ dan $g(x)$,

(a) $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

(b) $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$

(c) $\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$, dengan keadaan k ialah pemalar

(d) $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$, dengan keadaan $a < b < c$

(e) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$

Contoh 12

Diberi $\int_1^3 f(x)\, dx = 4$, $\int_3^5 f(x)\, dx = 3$ dan $\int_1^3 g(x)\, dx = 12$. Cari

(a) $\int_3^1 f(x)\, dx$ (b) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\, dx$ (c) $\int_1^5 f(x)\, dx$

Penyelesaian

(a) $\int_3^1 f(x)\, dx$

$= -\int_1^3 f(x)\, dx$

$= -4$

(b) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\, dx$

$= \int_1^3 f(x)\, dx + \int_1^3 g(x)\, dx$

$= 4 + 12$

$= 16$

(c) $\int_1^5 f(x)\, dx$

$= \int_1^3 f(x)\, dx + \int_3^5 f(x)\, dx$

$= 4 + 3$

$= 7$

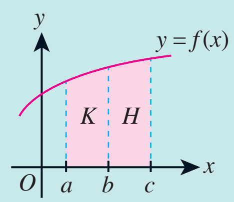
Contoh 13

Diberi $\int_2^5 f(x)\, dx = 12$, cari nilai h jika $\int_2^5 [hf(x) - 3]\, dx = 51$.

Penyelesaian

$$\int_2^5 [hf(x) - 3]\, dx = 51$$
$$h\int_2^5 f(x)\, dx - \int_2^5 3\, dx = 51$$
$$12h - \left[3x\right]_2^5 = 51$$
$$12h - [3(5) - 3(2)] = 51$$
$$12h - 9 = 51$$
$$h = 5$$

Sudut Informasi



Jumlah luas rantau = Luas rantau K + Luas rantau H

$\int_a^c f(x)\, dx$

$= \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$

Latihan Kendiri 3.5

1. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_2^4 x^3\, dx$ (b) $\int_1^4 \frac{2}{x^2}\, dx$ (c) $\int_1^5 (2x^2 + 3x)\, dx$

(d) $\int_2^6 \left(\frac{1}{x^3} - 2x\right) dx$ (e) $\int_1^3 \left(3x - \sqrt{x}\right) dx$ (f) $\int_3^5 \left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

2. Cari nilai bagi setiap kamiran tentu yang berikut.

(a) $\int_2^4 \left(\frac{x^3 + x^2}{x}\right) dx$ (b) $\int_1^3 \left(\frac{5 + x^2}{x^2}\right) dx$ (c) $\int_1^5 \left(\frac{(2x + 3)(x - 2)}{x^4}\right) dx$

(d) $\int_3^4 (3x - 4)^2\, dx$ (e) $\int_{-3}^{-1} \frac{3}{(5 - 3x)^3}\, dx$ (f) $\int_{-2}^{0} \frac{2}{\sqrt{3 - 2x}}\, dx$

3. Diberi $\int_2^5 f(x)\, dx = 3$, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_5^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_2^5 \frac{1}{2} f(x)\, dx$ (c) $\int_2^5 [3f(x) - 2]\, dx$

4. Diberi $\int_3^7 f(x)\, dx = 5$ dan $\int_3^7 k(x)\, dx = 7$. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_3^7 [f(x) + k(x)]\, dx$ (b) $\int_3^5 f(x)\, dx - \int_7^5 f(x)\, dx$ (c) $\int_3^7 [f(x) + 2x]\, dx$

Perkaitan antara had bagi hasil tambah luas segi empat tepat dengan luas di bawah suatu lengkung

Aktiviti Penerokaan 4

Berkumpulan PAK-21 STEM PK

Tujuan: Meneroka perkaitan antara had bagi hasil tambah luas segi empat tepat dengan luas di bawah suatu lengkung

ggbm.at/ck4ejqwb

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Katakan n ialah bilangan segi empat tepat di bawah suatu lengkung $y = -x^2 + 6x$.
3. Seret gelongsor n ke kiri dan ke kanan. Perhatikan luas rantau di bawah lengkung $y = -x^2 + 6x$ pada setiap nilai n yang berbeza.
4. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

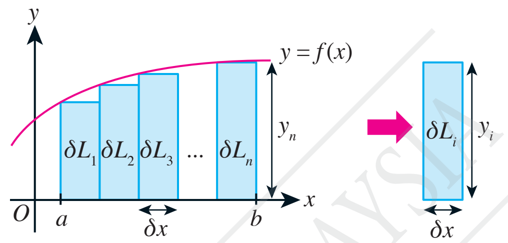
Bilangan segi empat tepat, n	Hasil tambah luas segi empat tepat di bawah lengkung	Luas rantau di bawah lengkung yang sebenar
1		
2		
⋮	⋮	
20		

5. Bersama-sama ahli kumpulan, bincangkan perkaitan antara hasil tambah luas segi empat tepat dengan luas rantau di bawah suatu lengkung.
6. Bentangkan hasil dapatan yang diperoleh di hadapan kelas.

3.3.1 3.3.2

Daripada Aktiviti Penerokaan 4, didapati bahawa apabila bilangan segi empat tepat di bawah suatu lengkung $y = f(x)$ bertambah, maka hasil tambah luas semua segi empat tepat di bawah lengkung itu menghampiri luas rantau di bawah lengkung yang sebenar.

Perhatikan lengkung $y = f(x)$ dalam rajah di sebelah. Luas di bawah lengkung $y = f(x)$ antara $x = a$ dengan $x = b$ itu boleh dibahagikan kepada n jalur segi empat tepat yang tipis. Apabila bilangan jalur ini bertambah, maka lebar setiap jalur ini semakin kecil.



Lebar setiap jalur segi empat tepat ini ditulis sebagai δx, dengan keadaan $\delta x = \dfrac{b - a}{n}$.

Didapati bahawa:

Luas jalur segi empat tepat, $\delta L_i \approx$ Panjang jalur segi empat tepat $\times$ Lebar jalur segi empat tepat

$$\approx y_i \times \delta x$$
$$\approx y_i \delta x$$

Luas n jalur segi empat tepat $\approx \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 + \ldots + \delta L_n$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \delta L_i$$
$$\approx \sum_{i=1}^{n} y_i \delta x$$

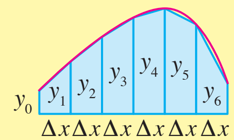
Apabila bilangan jalur segi empat tepat adalah cukup besar, iaitu $n \to \infty$, maka $\delta x \to 0$.

Secara amnya,

$$\text{Luas di bawah lengkung} = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \delta x \quad (\text{had})$$
$$= \int_a^b y \, dx$$

PERBINCANGAN

Luas di bawah suatu lengkung dapat dikaitkan dengan had bagi hasil tambah luas trapezium.



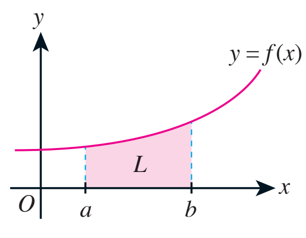
Berdasarkan perkaitan tersebut, bina rumus bagi $\int_a^b f(x)\, dx$.

Luas suatu rantau

Luas rantau antara suatu lengkung dengan paksi-x

Rajah di sebelah menunjukkan rantau antara lengkung $y = f(x)$ dengan paksi-x yang dibatasi oleh garis $x = a$ dan $x = b$. Rumus bagi luas rantau L itu diberi oleh:

$$L = \int_a^b y \, dx$$



Aktiviti Penerokaan 5

Berkumpulan PAK-21 STEM PK

Tujuan: Menentukan luas suatu rantau yang berada di atas dan di bawah paksi-x

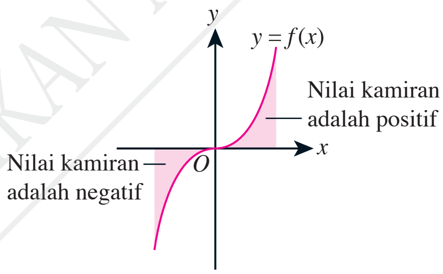
bit.ly/2FvKmYB

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan rantau di bawah lengkung $y = \frac{1}{3}x^3$ yang terpapar pada satah.
3. Gerakkan titik a pada $x = 0$ dan titik b pada $x = 5$.
4. Perhatikan kedudukan rantau yang terbentuk dan nilai bagi luas rantau itu.
5. Ulang langkah 3 dan 4 dengan mengubah titik a kepada $x = -5$ dan titik b kepada $x = 0$.
6. Catatkan nilai bagi kamiran tentu yang berikut berserta kedudukan rantaunya.
   (a) $\int_0^5 \frac{1}{3}x^3\,dx$ (b) $\int_{-5}^0 \frac{1}{3}x^3\,dx$
7. Bincangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 5, didapati bahawa:

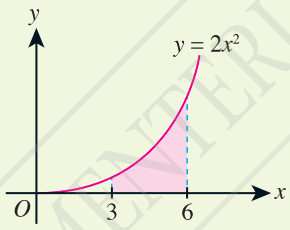
Bagi suatu rantau yang dibatasi oleh suatu lengkung dan paksi-x,
- Jika rantau itu berada di bawah paksi-x, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **negatif**.
- Jika rantau itu berada di atas paksi-x, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **positif**.
- Luas bagi kedua-dua rantau adalah positif.



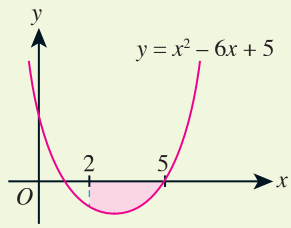
Contoh 14

Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

(a)



(b)



Penyelesaian

(a) Luas rantau $= \int_3^6 y\,dx$

$= \int_3^6 2x^2\,dx$

$= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_3^6$

$= \frac{2(6)^3}{3} - \frac{2(3)^3}{3}$

$= 126$

Maka, luas rantau berlorek ialah 126 unit^2.

Klik Teknologi

Gunakan aplikasi *Photomath* untuk mencari kamiran bagi suatu fungsi.

bit.ly/2QNZ3LJ

(b) Luas rantau

$= \int_2^5 y\, dx$

$= \int_2^5 (x^2 - 6x + 5)\, dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_2^5$

$= \left[\frac{5^3}{3} - \frac{6(5)^2}{2} + 5(5)\right] - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{6(2)^2}{2} + 5(2)\right]$

$= -9$

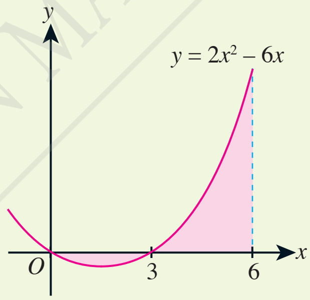
Maka, luas rantau berlorek ialah 9 unit^2.

Sudut Informasi

Tanda negatif pada hasil suatu kamiran hanya menunjukkan kedudukan luas rantau yang berada di bawah paksi-x. Oleh itu, tanda negatif tersebut boleh diabaikan.

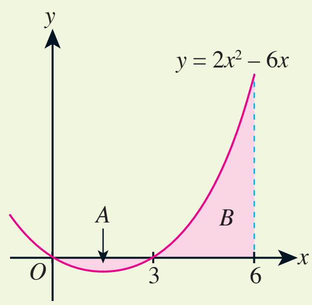
Contoh 15

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 2x^2 - 6x$. Cari luas bagi rantau yang berlorek itu.



Penyelesaian

Katakan A mewakili rantau berlorek di bawah paksi-x dan B mewakili rantau berlorek di atas paksi-x.



Luas rantau $A = \int_0^3 y\, dx$

$= \int_0^3 (2x^2 - 6x)\, dx$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_0^3$

$= \left[\frac{2(3)^3}{3} - 3(3)^2\right] - \left[\frac{2(0)^3}{3} - 3(0)^2\right]$

$= -9$

Jadi, luas rantau A ialah 9 unit^2.

Luas rantau $B = \int_3^6 y\, dx$

$= \int_3^6 (2x^2 - 6x)\, dx$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right]_3^6$

$= \left[\frac{2(6)^3}{3} - 3(6)^2\right] - \left[\frac{2(3)^3}{3} - 3(3)^2\right]$

$= 45$

Jadi, luas rantau B ialah 45 unit^2.

Maka, luas rantau berlorek $= 9 + 45$

$= 54$ unit^2

Kaedah Alternatif

Luas rantau berlorek

$= \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\, dx\right| + \int_3^6 (2x^2 - 6x)\, dx$

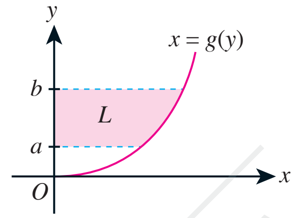
$= |-9| + 45$

$= 9 + 45$

$= 54$ unit^2

Luas rantau antara suatu lengkung dengan paksi-y

Rajah di sebelah menunjukkan rantau antara lengkung $x = g(y)$ dengan paksi-y yang dibatasi oleh garis $y = a$ dan $y = b$. Rumus bagi luas rantau L itu diberi oleh:



$$L = \int_a^b x \, dy$$

Aktiviti Penerokaan 6

Berkumpulan | PAK-21 | STEM | PK

Tujuan: Menentukan luas suatu rantau yang berada di sebelah kiri dan di sebelah kanan paksi-y

Langkah:

1. Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah.
2. Perhatikan rantau di bawah lengkung $x = y^{\frac{1}{3}}$ yang terpapar pada satah.
3. Gerakkan titik a pada $y = 0$ dan titik b pada $y = 5$.
4. Perhatikan kedudukan rantau yang terbentuk dan nyatakan sama ada nilai bagi luas rantau itu adalah positif atau negatif.
5. Ulang langkah 3 dan 4 dengan mengubah titik a kepada $y = -5$ dan titik b kepada $y = 0$.
6. Kemudian, salin dan lengkapkan jadual di bawah.

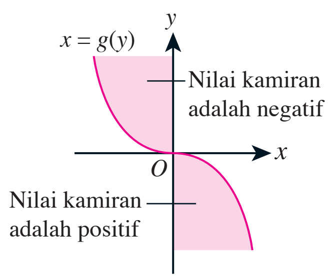
bit.ly/36rPW9W

	Nilai kamiran	Kedudukan rantau
$\int_0^5 y^{\frac{1}{3}} \, dy$		
$\int_{-5}^0 y^{\frac{1}{3}} \, dy$		

7. Bersama-sama ahli kumpulan, bincangkan perkaitan antara tanda bagi nilai kamiran dengan kedudukan rantaunya.
8. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 6, didapati bahawa:

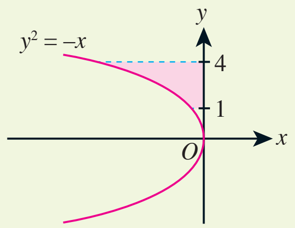
Bagi suatu rantau yang dibatasi oleh suatu lengkung dan paksi-y,
- Jika rantau itu berada di sebelah kiri paksi-y, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **negatif**.
- Jika rantau itu berada di sebelah kanan paksi-y, maka nilai bagi hasil kamiran adalah **positif**.
- Luas bagi kedua-dua rantau adalah positif.



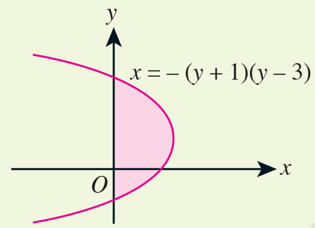
Contoh 16

Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

(a)



(b)



Penyelesaian

(a) Diberi $y^2 = -x$.
Jadi, $x = -y^2$.

$$\text{Luas rantau} = \int_1^4 x\, dy$$
$$= \int_1^4 -y^2\, dy$$
$$= \left[-\frac{y^3}{3}\right]_1^4$$
$$= \left[-\frac{4^3}{3}\right] - \left[-\frac{1^3}{3}\right]$$
$$= -21$$

Maka, luas rantau berlorek ialah 21 unit^2.

Bijak Kalkulator

Mencari penyelesaian dalam Contoh 16(a) dengan menggunakan kalkulator saintifik.

1. Tekan
$\int_{\square}^{\square}\square$ (–) ALPHA) x^2
▶ 1 ▶ 4 =
2. Skrin akan memaparkan

$\int_1^4 -x^2\, dx$
−21

(b) Diberi $x = -(y + 1)(y - 3)$.
Apabila $x = 0$,
$-(y + 1)(y - 3) = 0$
$y = -1$ atau $y = 3$

Jadi, batas bagi rantau berlorek itu ialah $y = -1$ dan $y = 3$.

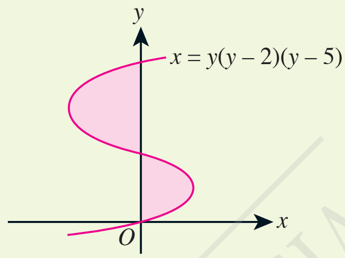
Oleh itu,

$$\text{Luas rantau} = \int_{-1}^{3} x\, dy$$
$$= \int_{-1}^{3} -(y + 1)(y - 3)\, dy$$
$$= \int_{-1}^{3} (-y^2 + 2y + 3)\, dy$$
$$= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{2y^2}{2} + 3y\right]_{-1}^{3}$$
$$= \left[-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3(3)\right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1)\right]$$
$$= 9 - \left(-\frac{5}{3}\right)$$
$$= \frac{32}{3}$$

Maka, luas rantau berlorek ialah $\frac{32}{3}$ unit^2.

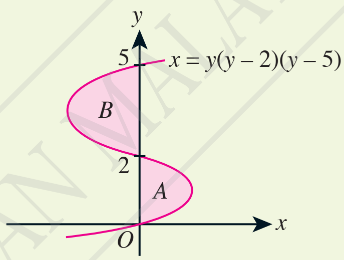
Contoh 17

Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $x = y(y - 2)(y - 5)$. Cari luas bagi rantau yang berlorek itu.



Penyelesaian

Katakan A mewakili rantau berlorek di sebelah kanan paksi-y dan B mewakili rantau berlorek di sebelah kiri paksi-y.



Diberi $x = y(y - 2)(y - 5)$.
Apabila $x = 0$,
$y(y - 2)(y - 5) = 0$
$y = 0, \quad y = 2 \quad$ atau $\quad y = 5$

Jadi, batas bagi rantau A ialah $y = 0$ dan $y = 2$ dan batas bagi rantau B ialah $y = 2$ dan $y = 5$.

Oleh itu,

Luas rantau A

$$= \int_0^2 y(y - 2)(y - 5)\, dy$$
$$= \int_0^2 (y^3 - 7y^2 + 10y)\, dy$$
$$= \left[\frac{y^4}{4} - \frac{7y^3}{3} + \frac{10y^2}{2}\right]_0^2$$
$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{7(2)^3}{3} + 5(2)^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{7(0)^3}{3} + 5(0)^2\right]$$
$$= \frac{16}{3} - 0$$
$$= \frac{16}{3}$$

Jadi, luas rantau A ialah $\frac{16}{3}$ unit^2.

Luas rantau B

$$= \int_2^5 y(y - 2)(y - 5)\, dy$$
$$= \int_2^5 (y^3 - 7y^2 + 10y)\, dy$$
$$= \left[\frac{y^4}{4} - \frac{7y^3}{3} + \frac{10y^2}{2}\right]_2^5$$
$$= \left[\frac{5^4}{4} - \frac{7(5)^3}{3} + 5(5)^2\right] - \left[\frac{2^4}{4} - \frac{7(2)^3}{3} + 5(2)^2\right]$$
$$= -\frac{125}{12} - \frac{16}{3}$$
$$= -\frac{63}{4}$$

Jadi, luas rantau B ialah $\frac{63}{4}$ unit^2.

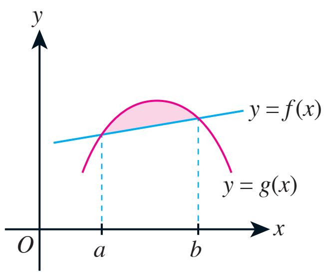
Luas rantau berlorek $= \frac{16}{3} + \frac{63}{4}$
$= \frac{253}{12}$

Maka, luas rantau berlorek ialah $\frac{253}{12}$ unit^2.

Luas rantau antara suatu lengkung dengan garis lurus

Rantau berlorek seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 3.1(a) ialah rantau antara lengkung $y = g(x)$ dengan garis lurus $y = f(x)$ dari $x = a$ hingga $x = b$.

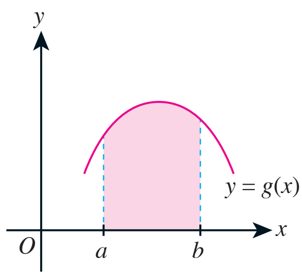
Luas bagi rantau berlorek itu adalah seperti berikut:



Luas rantau berlorek

Rajah 3.1(a)

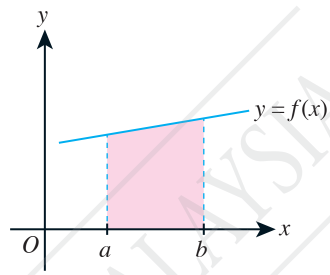
=



Luas di bawah lengkung $y = g(x)$

Rajah 3.1(b)

–



Luas di bawah garis $y = f(x)$

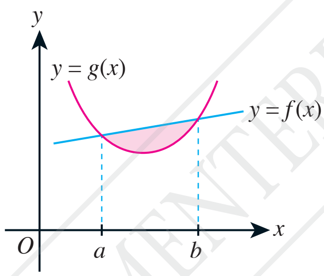
Rajah 3.1(c)

Maka,

$$\text{Luas rantau berlorek} = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$$

Rantau berlorek dalam Rajah 3.2(a) pula menunjukkan rantau antara garis lurus $y = f(x)$ dengan lengkung $y = g(x)$ dari $x = a$ hingga $x = b$.

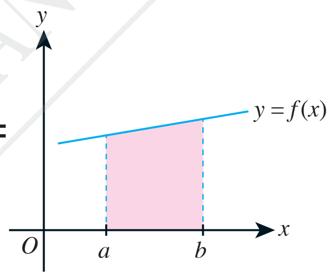
Luas bagi rantau berlorek itu adalah seperti berikut:



Luas rantau berlorek

Rajah 3.2(a)

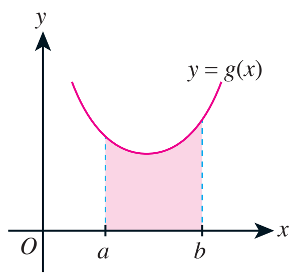
=



Luas di bawah garis $y = f(x)$

Rajah 3.2(b)

–



Luas di bawah lengkung $y = g(x)$

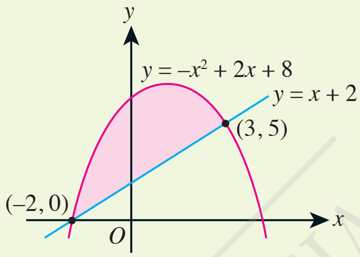
Rajah 3.2(c)

Maka,

$$\text{Luas rantau berlorek} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Contoh 18

Dalam rajah di sebelah, lengkung $y = -x^2 + 2x + 8$ bersilang dengan garis lurus $y = x + 2$ pada titik $(-2, 0)$ dan $(3, 5)$. Cari luas bagi rantau yang berlorek.



Penyelesaian

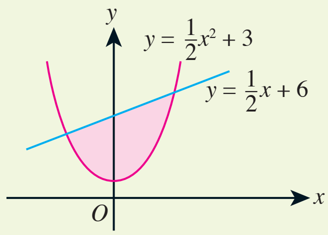
$$\begin{aligned}
\text{Luas rantau} &= \int_{-2}^{3} (-x^2 + 2x + 8)\, dx - \int_{-2}^{3} (x + 2)\, dx \\
&= \int_{-2}^{3} (-x^2 + 2x + 8 - x - 2)\, dx \\
&= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{3} \\
&= \left[-\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2)\right] \\
&= \frac{125}{6} \text{ unit}^2
\end{aligned}$$

PERBINCANGAN

Apakah kaedah lain yang boleh digunakan untuk menyelesaikan Contoh 18? Bincangkan.

Contoh 19

Rajah di sebelah menunjukkan garis lurus $y = \frac{1}{2}x + 6$ yang bersilang dengan lengkung $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$. Hitung luas rantau berlorek yang dibatasi oleh garis lurus dan lengkung itu.



Penyelesaian

$y = \frac{1}{2}x^2 + 3 \quad \ldots ❶$

$y = \frac{1}{2}x + 6 \quad \ldots ❷$

Gantikan ❶ ke dalam ❷,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2 + 3 &= \frac{1}{2}x + 6 \\
\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 &= 0 \\
x^2 - x - 6 &= 0 \\
(x + 2)(x - 3) &= 0 \\
x = -2 \text{ atau } x &= 3
\end{aligned}$$

Luas rantau

$$\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x + 6\right) dx - \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) dx \\
&= \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x + 6\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) dx \\
&= \int_{-2}^{3} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + 3\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + 3x\right]_{-2}^{3} \\
&= \left[\frac{3^2}{4} - \frac{3^4}{6} + 3(3)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{4} - \frac{(-2)^3}{6} + 3(-2)\right] \\
&= \frac{125}{12} \text{ unit}^2
\end{aligned}$$

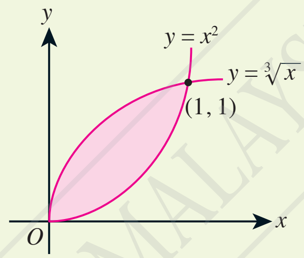
Luas rantau di antara dua lengkung

Contoh 20

Lengkung $y = x^2$ dan $y = \sqrt[3]{x}$ bersilang pada titik (0, 0) dan (1, 1). Cari luas bagi rantau di antara dua lengkung itu.

Penyelesaian

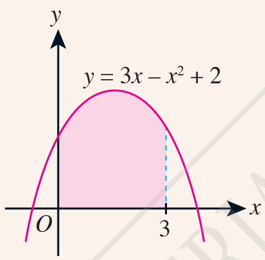
$$\begin{aligned}\text{Luas rantau} &= \int_0^1 \sqrt[3]{x}\ dx - \int_0^1 x^2\ dx \\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{3(1)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{1^3}{3}\right] - \left[\frac{3(0)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{0^3}{3}\right] \\ &= \frac{5}{12}\ \text{unit}^2\end{aligned}$$



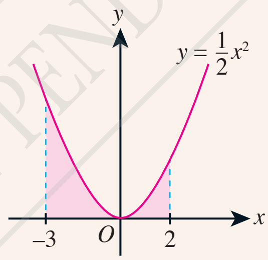
Latihan Kendiri 3.6

1. Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

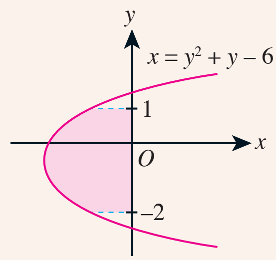
(a)



(b)

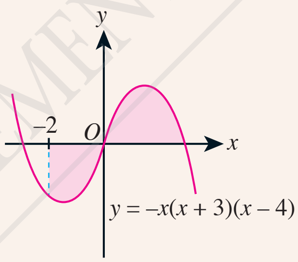


(c)

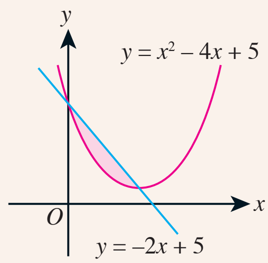


2. Cari luas bagi setiap rantau berlorek yang berikut.

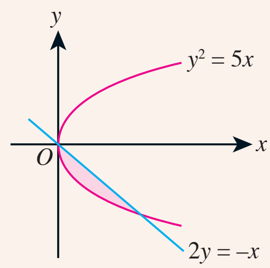
(a)



(b)



(c)



3. (a) Jika lengkung $y = -x^3 - x^2$ menyilang lengkung $y = -x - x^2$ pada titik (–1, 0), (0, 0) dan (1, –2), cari luas rantau di antara dua lengkung itu.
   (b) Diberi bahawa lengkung $y = x^2 - 4x$ dan $y = 2x - x^2$ bersilang pada dua titik. Cari luas bagi rantau di antara dua lengkung itu.

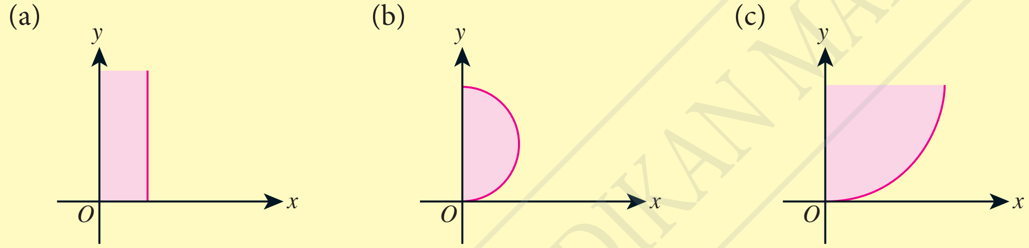
Perkaitan antara had bagi hasil tambah isi padu silinder dengan isi padu janaan daripada kisaran suatu rantau

Aktiviti Penerokaan 7 Berkumpulan

Tujuan: Menentukan bentuk suatu bongkah apabila suatu rantau dikisarkan sepenuhnya melalui 360° pada suatu paksi

Langkah:

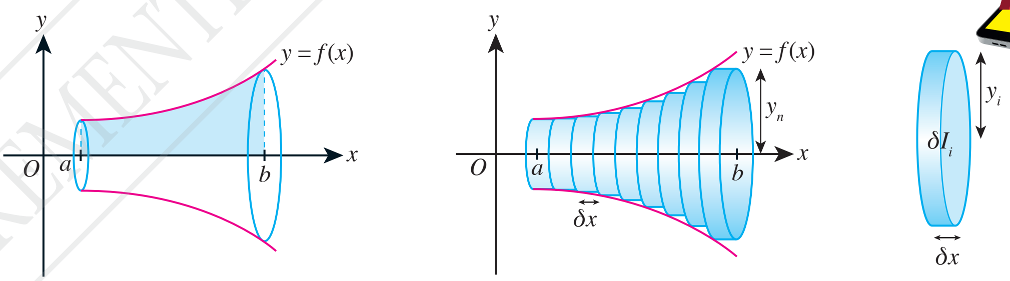
1. Sediakan tiga buah tanglung kertas seperti yang ditunjukkan dalam gambar di sebelah.
2. Ceraikan bahagian tanglung dan ambil bahagian yang paling besar.
3. Perhatikan setiap rantau berlorek dalam rajah di bawah. Kemudian, lukis setiap rantau itu pada tiga tanglung kertas yang berbeza.



4. Guntingkan ketiga-tiga tanglung kertas itu mengikut bentuk rantau yang dilukis.
5. Buka tanglung tersebut dan tampalkan kedua-dua permukaan yang bertemu.
6. Kemudian, perhatikan ketiga-tiga bongkah yang terbentuk. Apakah perkaitan antara setiap bongkah tersebut dengan kisaran 360°?

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 7, didapati bahawa suatu bongkah kisaran akan dijana apabila luas di bawah suatu rantau dikisarkan sepenuhnya melalui 360° pada suatu paksi.

Isi padu bongkah janaan yang terbentuk apabila suatu rantau berlorek diputarkan melalui 360° pada paksi-x dapat ditentukan dengan membahagikan bongkah tersebut kepada n silinder mencancang dengan lebar δx. Perhatikan rajah yang berikut.



Apabila nilai δx adalah kecil, maka isi padu bongkah yang dijana ialah jumlah isi padu bagi semua silinder itu.

Isi padu silinder, δI_i = Luas keratan rentas × Lebar silinder

$$= \pi y_i^{\,2} \times \delta x$$
$$= \pi y_i^{\,2} \delta x$$

Isi padu n silinder $= \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3 + \ldots + \delta I_n$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta I_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \, \delta x$$

Apabila bilangan silinder adalah cukup besar, iaitu $n \rightarrow \infty$, maka $\delta x \rightarrow 0$.
Secara amnya,

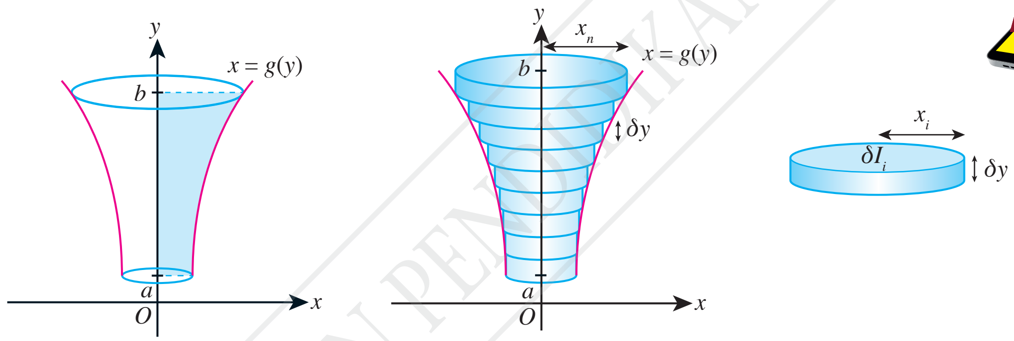
$$\text{Isi padu bongkah janaan} = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \, \delta x = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

(had)

Sudut Informasi

Nilai bagi isi padu janaan adalah sentiasa positif.

Isi padu bongkah janaan yang terbentuk apabila suatu rantau berlorek diputarkan melalui 360° pada paksi-y pula dapat ditentukan dengan menggunakan kaedah yang sama seperti isi padu bongkah janaan apabila rantau berlorek diputarkan melalui 360° pada paksi-x. Bongkah tersebut dibahagikan kepada n silinder mengufuk dengan tinggi δy. Perhatikan rajah yang berikut.



Apabila nilai δy adalah kecil, maka isi padu bongkah yang dijana ialah jumlah isi padu bagi semua silinder itu.

Isi padu silinder, δI_i = Luas keratan rentas × Tinggi silinder

$$= \pi x_i^2 \times \delta y$$

$$= \pi x_i^2 \delta y$$

Isi padu n silinder $= \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3 + \ldots + \delta I_n$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta I_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi x_i^2 \, \delta y$$

Apabila bilangan silinder adalah cukup besar, iaitu $n \rightarrow \infty$, maka $\delta y \rightarrow 0$.
Secara amnya,

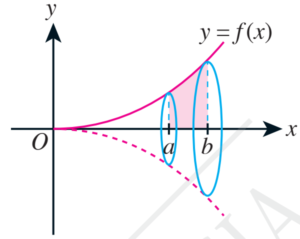
$$\text{Isi padu bongkah janaan} = \lim_{\delta y \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi x_i^2 \, \delta y = \int_a^b \pi x^2 \, dy$$

(had)

Isi padu janaan bagi suatu rantau yang dikisarkan pada paksi-*x* atau paksi-*y*

Isi padu janaan I bagi suatu rantau di bawah suatu lengkung $y = f(x)$ yang dibatasi oleh $x = a$ dan $x = b$ apabila dikisarkan melalui 360° pada paksi-x ialah:

$$I = \int_a^b \pi y^2 \, dx$$

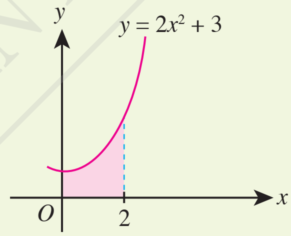


Contoh 21

Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, bagi rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = 2x^2 + 3$, $x = 0$ dan $x = 2$ yang dikisarkan sepenuhnya pada paksi-x.

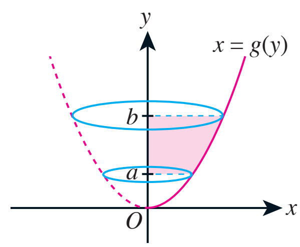
Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\text{Isi padu janaan} &= \int_0^2 \pi y^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^2 (2x^2 + 3)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^2 (4x^4 + 12x^2 + 9) \, dx \\
&= \pi \left[\frac{4x^5}{5} + \frac{12x^3}{3} + 9x \right]_0^2 \\
&= \pi \left[\left(\frac{4(2)^5}{5} + 4(2)^3 + 9(2) \right) - \left(\frac{4(0)^5}{5} + 4(0)^3 + 9(0) \right) \right] \\
&= 75\frac{3}{5}\pi \text{ unit}^3
\end{aligned}$$



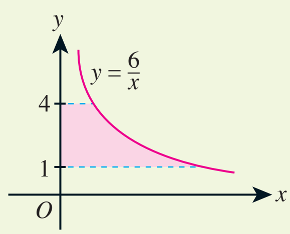
Isi padu janaan I bagi suatu rantau di bawah suatu lengkung $x = g(y)$ yang dibatasi oleh $y = a$ dan $y = b$ apabila dikisarkan melalui 360° pada paksi-y ialah:

$$I = \int_a^b \pi x^2 \, dy$$



Contoh 22

Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek dalam rajah di sebelah diputarkan melalui 360° pada paksi-y.



Penyelesaian

Diberi $y = \dfrac{6}{x}$

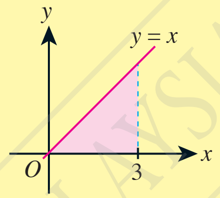
Jadi, $x = \dfrac{6}{y}$

$$
\begin{aligned}
\text{Isi padu janaan} &= \int_1^4 \pi x^2 \, dy \\
&= \pi \int_1^4 \left(\frac{6}{y}\right)^2 dy \\
&= \pi \int_1^4 \left(\frac{36}{y^2}\right) dy \\
&= \pi \int_1^4 (36y^{-2}) \, dy \\
&= \pi \left[\frac{36y^{-1}}{-1}\right]_1^4 \\
&= \pi \left[-\frac{36}{y}\right]_1^4 \\
&= \pi \left[\left(-\frac{36}{4}\right) - \left(-\frac{36}{2}\right)\right] \\
&= 27\pi \text{ unit}^3
\end{aligned}
$$

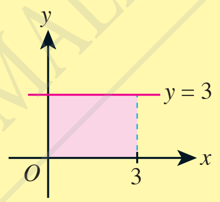
PERBINCANGAN

Apakah bentuk geometri yang akan terbentuk apabila rantau berlorek dalam setiap rajah di bawah dikisarkan sepenuhnya pada paksi-x?

(a)

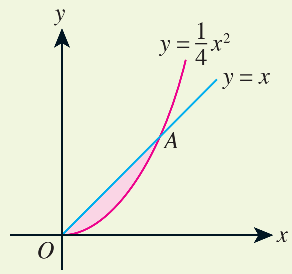


(b)



Contoh 23

Dalam rajah di sebelah, lengkung $y = \frac{1}{4}x^2$ bersilang dengan garis lurus $y = x$ pada titik O dan A. Cari
(a) koordinat bagi titik A,
(b) isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek itu dikisarkan sepenuhnya pada paksi-x.



Penyelesaian

(a) $y = \frac{1}{4}x^2 \quad \ldots$ ❶

$y = x \quad \ldots$ ❷

Gantikan ❶ ke dalam ❷,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}x^2 &= x \\
x^2 &= 4x \\
x^2 - 4x &= 0 \\
x(x - 4) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{atau} \quad x &= 4
\end{aligned}
$$

Gantikan $x = 4$ ke dalam ❷, kita peroleh $y = 4$.

Maka, koordinat bagi titik A ialah $(4, 4)$.

(b) Katakan I_1 ialah isi padu janaan bagi garis lurus $y = x$ dan I_2 ialah isi padu janaan bagi lengkung $y = \frac{1}{4}x^2$ daripada $x = 0$ hingga $x = 4$.

$$I_1 = \int_0^4 \pi(x)^2\, dx$$
$$I_1 = \pi \int_0^4 x^2\, dx$$
$$I_1 = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4$$
$$I_1 = \pi\left[\left(\frac{4^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)\right]$$
$$I_1 = \frac{64}{3}\pi \text{ unit}^3$$

$$I_2 = \int_0^4 \pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$
$$I_2 = \pi \int_0^4 \frac{1}{16}x^4\, dx$$
$$I_2 = \pi\left[\frac{x^5}{16(5)}\right]_0^4$$
$$I_2 = \pi\left[\left(\frac{4^5}{80}\right) - \left(\frac{0^5}{80}\right)\right]$$
$$I_2 = \frac{64}{5}\pi \text{ unit}^3$$

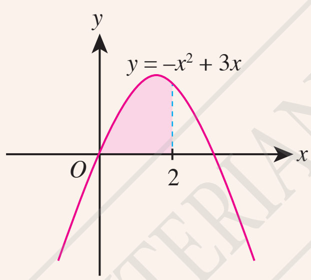
Maka, isi padu janaan $= I_1 - I_2$

$$= \frac{64}{3}\pi - \frac{64}{5}\pi$$
$$= 8\frac{8}{15}\pi \text{ unit}^3$$

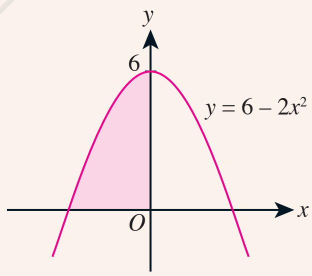
Latihan Kendiri 3.7

1. Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek dalam setiap rajah yang berikut dikisarkan melalui 360°.

(a) Pada paksi-x.



(b) Pada paksi-y.



2. Hitung isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh lengkung $y^2 = -4x$, $y = 0$ dan $y = 2$ dikisarkan melalui 360° pada paksi-y.

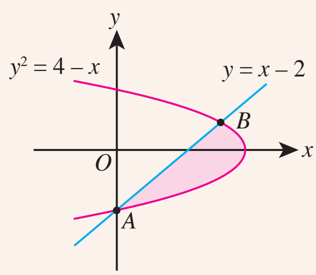
3. Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh garis lurus $y = 5 - x$, lengkung $y = -x^2 + 4$, paksi-x dan paksi-y dikisarkan sepenuhnya melalui paksi-x.

4. Dalam rajah di sebelah, lengkung $y^2 = 4 - x$ dan garis lurus $y = x - 2$ bersilang pada dua titik A dan B. Cari

(a) koordinat bagi titik A,

(b) koordinat bagi titik B,

(c) isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek yang dibatasi oleh lengkung $y^2 = 4 - x$ dan garis lurus $y = x - 2$ itu diputarkan melalui 360° pada paksi-y.



Latihan Formatif 3.3

Kuiz bit.ly/2Esl90x

1. Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a) $\int_{-1}^{3} (2 - x)^5 \, dx$ (b) $\int_{-3}^{2} \dfrac{8x - 6x^2 + 8}{2 - x} \, dx$ (c) $\int_{-2}^{3} 2x^2(x^2 - x)dx$

2. (a) Diberi $\int_0^3 f(x) \, dx = 2$ dan $\int_2^5 g(x) \, dx = 7$. Cari nilai bagi $\int_3^0 \frac{1}{2} f(x) \, dx + \int_2^5 3g(x) \, dx$.

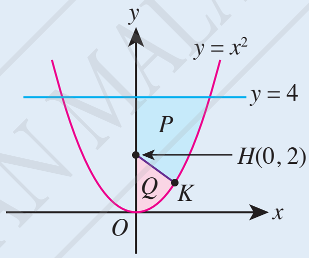
(b) Jika $\int_1^7 k(x) \, dx = 10$, cari nilai bagi $\int_1^3 [k(x) - 3] \, dx + \int_3^7 k(x) \, dx$.

3. Diberi luas rantau di bawah lengkung $y = x^2 + hx - 5$ yang dibatasi oleh garis $x = 1$ dan $x = 4$ ialah $28\frac{1}{2}$ unit². Cari nilai bagi h.

4. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = x^2$ dan garis lurus $y = 4$. Suatu garis lurus dilukis melalui titik $H(0, 2)$ dengan kecerunan -1 dan bertemu dengan lengkung $y = x^2$ pada titik K. Cari

(a) koordinat titik K,

(b) nisbah luas rantau P kepada luas rantau Q.



5. (a) Lakarkan graf bagi lengkung $y = 6x + x^2$.

(b) Cari persamaan tangen kepada lengkung $y = 6x + x^2$ pada asalan dan pada titik dengan keadaan $x = 2$.

(c) Diberi bahawa kedua-dua tangen kepada lengkung itu bertemu pada titik A, cari koordinat titik A. Seterusnya, cari luas rantau yang dibatasi oleh garis-garis persamaan tangen dan lengkung tersebut.

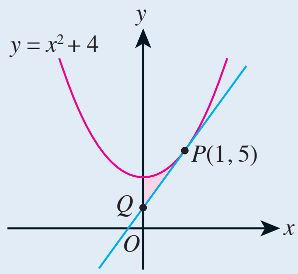
6. Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, bagi rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = x^2 + 2$, garis lurus $x = 1$ dan $x = 2$ yang diputarkan melalui 360° pada paksi-y.

7. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y = x^2 + 4$ dan tangen kepada lengkung itu pada titik $P(1, 5)$.

(a) Cari koordinat bagi titik Q.

(b) Hitung luas rantau berlorek.

(c) Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = x^2 + 4$, paksi-y dan garis lurus $y = 8$ dikisarkan sepenuhnya pada paksi-y.

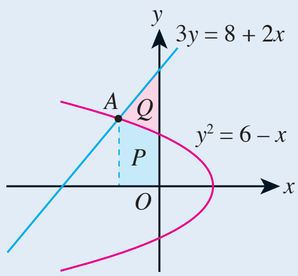


8. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y^2 = 6 - x$ dan garis lurus $3y = 8 + 2x$ yang bersilang pada titik A.

(a) Cari koordinat bagi titik A.

(b) Hitung luas rantau berlorek Q.

(c) Kira isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila luas rantau berlorek P diputarkan melalui 360° pada paksi-x.



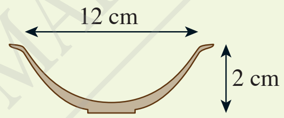
3.4 Aplikasi Pengamiran

Pengamiran merupakan satu daripada cabang dalam bidang kalkulus dan mempunyai banyak aplikasi yang berguna dalam kehidupan seharian. Melalui pengamiran, kita dapat mencari luas suatu rantau yang berbentuk lengkung, menentukan jarak yang dilalui oleh suatu objek daripada fungsi halaju serta menyelesaikan banyak masalah dalam bidang ekonomi, biologi dan statistik.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan pengamiran

Contoh 24 APLIKASI MATEMATIK

Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas bagi sebuah mangkuk berbentuk parabola yang fungsinya boleh diwakili oleh $y = ax^2$. Diameter dan kedalaman mangkuk itu masing-masing ialah 12 cm dan 2 cm. Tunjukkan bahawa $a = \frac{1}{18}$. Seterusnya, cari isi padu, dalam sebutan π, bahagian dalaman mangkuk tersebut.



Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Bentuk bahagian dalaman mangkuk itu diwakili oleh $y = ax^2$.
- Diameter mangkuk = 12 cm.
- Kedalaman mangkuk = 2 cm.
- Cari nilai a bagi persamaan $y = ax^2$.
- Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, bahagian dalaman mangkuk itu.

2 . Merancang strategi

- Gantikan koordinat (6, 2) ke dalam persamaan $y = ax^2$.
- Gunakan rumus $\int_0^2 \pi x^2 \, dy$.

3 . Melaksanakan strategi

Diberi $y = ax^2$.
Apabila $x = 6$ dan $y = 2$,

$$2 = a(6)^2$$
$$2 = 36a$$
$$a = \frac{1}{18}$$

Jadi, $y = \frac{1}{18}x^2$

$$x^2 = 18y$$

Isi padu dalaman mangkuk

$$= \int_0^2 \pi(18y)\, dy$$
$$= \pi\left[\frac{18y^2}{2}\right]_0^2$$
$$= \pi[9(2)^2 - 9(0)^2]$$
$$= 36\pi \text{ cm}^3$$

4 . Membuat refleksi

$$\int_0^2 \pi\left(\frac{y}{a}\right) dy = 36\pi$$
$$\pi\left[\frac{y^2}{2a}\right]_0^2 = 36\pi$$
$$\left[\frac{2^2}{2a} - \frac{0^2}{2a}\right] = \frac{36\pi}{\pi}$$
$$\frac{2}{a} = 36$$
$$a = \frac{1}{18}$$

Contoh 25 APLIKASI MATEMATIK

Dalam satu kajian, didapati bahawa kadar pertambahan luas bagi koloni bakteria pada agar-agar makmal boleh diwakili oleh $\frac{dA}{dt} = 2t + 5$, dengan keadaan A ialah luas koloni bakteria, dalam cm^2, dan t ialah masa, dalam saat, apabila bakteria dikulturkan pada agar-agar.

Diberi bahawa bilangan bakteria bagi setiap keluasan 1 cm^2 ialah 1 000 000 sel dan koloni bakteria mempunyai ketebalan satu sel sahaja. Cari bilangan bakteria selepas 5 saat.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

- Kadar pertambahan luas bagi koloni bakteria pada agar-agar makmal, $\frac{dA}{dt} = 2t + 5$.
- Bilangan bakteria bagi keluasan 1 cm^2 = 1 000 000 sel.
- Cari luas bagi koloni bakteria.
- Cari bilangan bakteria selepas 5 saat.

2. Merancang strategi

- Gunakan rumus $\int_0^5 (2t + 5)\, dt$.
- Cari bilangan bakteria dengan mendarabkan luas koloni bakteria dengan bilangan sel per cm^2.

3. Melaksanakan strategi

Luas koloni bakteria selepas 5 saat

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^5 (2t + 5)\, dt \\
&= \left[\frac{2t^2}{2} + 5t\right]_0^5 \\
&= \left[t^2 + 5t\right]_0^5 \\
&= [(5^2 + 5(5)) - (0^2 + 5(0))] \\
&= 50 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Bilangan bakteria} &= 50 \times 1\,000\,000 \\
&= 50\,000\,000 \\
&= 5 \times 10^7
\end{aligned}
$$

Maka, bilangan bakteria selepas 5 saat ialah 5×10^7 sel.

4. Membuat refleksi

Katakan u ialah masa yang diperlukan untuk menghasilkan 5×10^7 sel bakteria.

$$
\begin{aligned}
\left[\int_0^u (2t + 5)\, dt\right] \times 1\,000\,000 &= 5 \times 10^7 \\
\left[\frac{2t^2}{2} + 5t\right]_0^u &= \frac{5 \times 10^7}{1\,000\,000} \\
\left[t^2 + 5t\right]_0^u &= \frac{5 \times 10^7}{1\,000\,000} \\
[(u^2 + 5u) - 0] &= 50 \\
u^2 + 5u &= 50 \\
u^2 + 5u - 50 &= 0
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan kaedah pemfaktoran, kita peroleh

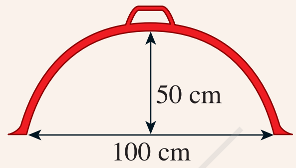
$(u + 10)(u - 5) = 0$

$u = -10$ atau $u = 5$

Oleh sebab nilai u mestilah positif, maka $u = 5$ saat.

Latihan Kendiri 3.8

1. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas bagi sebuah tudung saji rotan berbentuk parabola yang boleh diwakili oleh persamaan $y = -kx^2$, dengan keadaan y adalah tinggi, dalam m, dan x ialah jejari, dalam m, tudung saji itu.



(a) Tunjukkan bahawa $k = \dfrac{1}{50}$.

(b) Cari isi padu, dalam sebutan π, bahagian dalaman tudung saji itu.

2. Kadar penyusutan nilai harga bagi sebuah kereta dalam masa setahun diberi oleh $S'(t) = \dfrac{A}{1\ 000}(20 - t)$, dengan keadaan A ialah nilai harga asal, dalam RM, kereta tersebut dan t ialah bilangan tahun kereta itu dibeli.

(a) Diberi harga asal bagi sebuah kereta ialah RM48 000. Cari nilai harga kereta itu selepas 7 tahun.

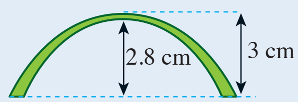
(b) Jika harga asal sebuah kereta ialah RM88 500, cari peratus susutan nilai harga kereta tersebut selepas 5 tahun.

Latihan Formatif 3.4

Kuiz bit.ly/38MgTXK

1. Sebuah kilang menghasilkan minyak masak sawit. Didapati bahawa sebuah tangki minyak yang berbentuk silinder di kilang tersebut mengalami kebocoran. Tinggi minyak dalam tangki itu berkurang dengan kadar 5 cmmin^{-1} dan kadar perubahan isi padu minyak dalam tangki terhadap tinggi minyak diberi oleh $\dfrac{dV}{dh} = \dfrac{3}{5}t - 6$, dengan keadaan t ialah masa, dalam minit. Cari isi padu, dalam cm^3, minyak yang mengalir keluar daripada tangki itu selepas 0.5 jam.

2. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas sebuah penutup mesin yang dihasilkan oleh mesin pencetak 3D. Penutup itu diperbuat daripada sejenis bahan pencetak, iaitu filamen plastik. Bahagian dalam dan bahagian luar penutup itu masing-masing boleh diwakili oleh $y = -\dfrac{1}{16}x^2 + 2.8$ dan $y = -\dfrac{1}{20}x^2 + 3$. Anggarkan kos, dalam RM, filamen plastik yang digunakan untuk menghasilkan 20 penutup yang sama jika harga 1 cm^3 filamen plastik ialah 7 sen.



3. Kadar penghasilan suatu mesin di sebuah kilang diberi oleh $\dfrac{dK}{dt} = 50\left[1 + \dfrac{300}{(t + 25)^2}\right]$, dengan keadaan K ialah bilangan mesin yang dihasilkan dan t ialah bilangan minggu mesin tersebut dalam tempoh pengeluaran. Cari

(a) bilangan mesin yang dihasilkan selepas 5 tahun,

(b) bilangan mesin yang dihasilkan pada tahun ke-6.

SUDUT REFLEKSI

PENGAMIRAN

Proses songsangan kepada pembezaan

Kamiran tak tentu

- $\int ax^n \, dx = \dfrac{ax^{n+1}}{n+1} + c, \, n \neq -1$
- $\int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
- $\int (ax+b)^n \, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c, \, n \neq -1$

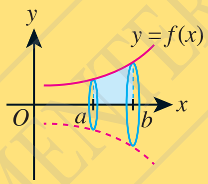
Persamaan lengkung

Diberi suatu fungsi kecerunan $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$, maka persamaan lengkung bagi fungsi itu ialah $y = \int f'(x) \, dx$.

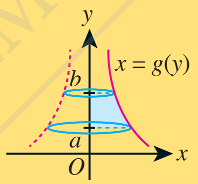
Kamiran tentu

- $\int_a^b f(x) \, dx = \left[g(x) + c\right]_a^b = g(b) - g(a)$
- $\int_a^a f(x) \, dx = 0$
- $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$
- $\int_a^b kf(x) \, dx = k\int_a^b f(x) \, dx$
- $\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$

Isi padu janaan

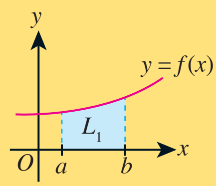


Isi padu janaan $= \int_a^b \pi y^2 \, dx$

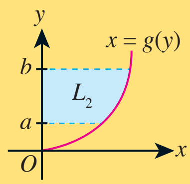


Isi padu janaan $= \int_a^b \pi x^2 \, dy$

Luas di bawah lengkung



Luas rantau L_1 $= \int_a^b y \, dx$



Luas rantau L_2 $= \int_a^b x \, dy$

Aplikasi

Penulisan Jurnal

Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz merupakan dua orang ahli matematik yang terkenal dengan sumbangan mereka dalam bidang kalkulus. Namun, kedua-dua tokoh ini terlibat dalam satu perbalahan intelektual yang dikenali sebagai Kontroversi Kalkulus.

Buat satu kajian tentang sumbangan tokoh-tokoh ini dalam bidang kalkulus dan punca berlakunya kontroversi tersebut. Berdasarkan hasil dapatan anda, siapakah tokoh pertama yang mencipta kalkulus? Persembahkan hasil dapatan anda dalam satu folio grafik yang menarik.

Latihan Sumatif

1. Cari kamiran tak tentu bagi setiap yang berikut. TP 1

(a) $\int x(x-2)(x+3)\,dx$ (b) $\int \dfrac{2}{(2x-3)^3}\,dx$

2. Diberi bahawa $\int \dfrac{2}{(3x-2)^n}\,dx = a(3x-2)^{-2} + c$. TP 2

(a) Cari nilai bagi a dan n.

(b) Dengan menggunakan nilai n yang diperoleh di (a), cari nilai bagi $\int_1^3 \dfrac{8}{(3x-2)^n}\,dx$.

3. Diberi $y = \dfrac{3(2x+1)^2}{5x-1}$, tunjukkan bahawa $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(20x^2-8x-9)}{(5x-1)^2}$. Seterusnya, cari nilai bagi $\int_1^4 \dfrac{3(20x^2-8x-9)}{(5x-1)^2}\,dx$. TP 2

4. Suatu lengkung mempunyai fungsi kecerunan $f'(x) = 2x^2 + 5x - r$, dengan keadaan r ialah suatu pemalar. Jika lengkung tersebut melalui titik $(1, 14)$ dan $(-2, -16)$, cari nilai r. TP 3

5. Diberi $\int_0^4 f(x)\,dx = 4$ dan $\int_1^v g(x)\,dx = 3$, cari TP 3

(a) nilai bagi $\int_0^2 f(x)\,dx - \int_4^2 f(x)\,dx$,

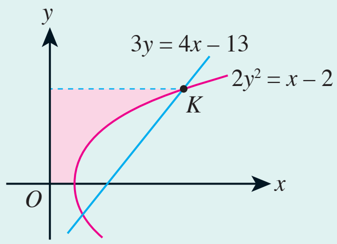
(b) nilai v jika $\int_0^4 f(x)\,dx + \int_1^v [g(x) + x]\,dx = 19$.

6. Diberi $\dfrac{dV}{dt} = 10t + 3$, dengan V ialah isi padu, dalam cm^3, suatu objek dan t ialah masa, dalam s. Apabila $t = 2$, isi padu objek tersebut ialah $24\ cm^3$. Cari isi padu, dalam cm^3, objek tersebut apabila $t = 5$. TP 4

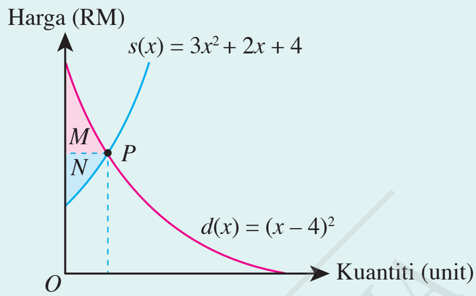
7. Dalam rajah di sebelah, garis lurus $3y = 4x - 13$ menyilang lengkung $2y^2 = x - 2$ pada titik K. Cari TP 2

(a) koordinat titik K,

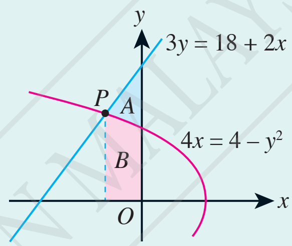
(b) luas rantau berlorek.



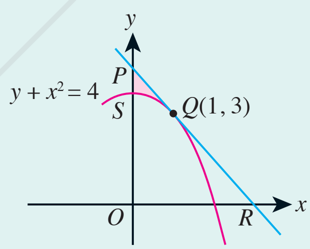
8. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung permintaan pengguna, $d(x) = (x - 4)^2$ dan lengkung penawaran pengeluar, $s(x) = 3x^2 + 2x + 4$. Rantau M mewakili lebihan pengguna dan rantau N mewakili lebihan pengeluar. Titik P pula dikenali sebagai titik keseimbangan antara permintaan pengguna dengan penawaran pengeluar. Cari TP 3
(a) titik keseimbangan P,
(b) lebihan pengguna pada titik keseimbangan P,
(c) lebihan pengeluar pada titik keseimbangan P.



9. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $4x = 4 - y^2$ yang menyilang garis lurus $3y = 18 + 2x$ pada titik P. TP 4
(a) Cari koordinat bagi titik P.
(b) Hitung luas rantau berlorek A.
(c) Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau berlorek B diputarkan melalui 360° pada paksi-x.

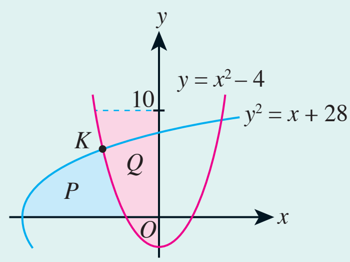


10. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y + x^2 = 4$ dan garis tangen PR pada titik $Q(1, 3)$. Cari TP 4
(a) koordinat bagi titik P, R dan S,
(b) luas rantau berlorek,
(c) isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh lengkung $y + x^2 = 4$, paksi-y dan garis lurus yang selari dengan paksi-x dan melalui titik Q diputarkan melalui 360° pada paksi-y.

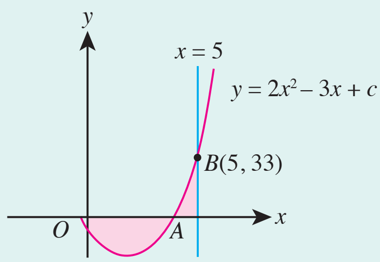


11. Diberi suatu lengkung dengan fungsi kecerunan $f'(x) = px^2 + 6x$, dengan keadaan p ialah pemalar. Jika $y = 24x - 30$ ialah persamaan tangen kepada lengkung tersebut pada titik $(2, q)$, cari nilai p dan q. TP 4

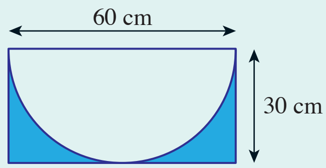
12. Rajah di sebelah menunjukkan lengkung $y^2 = x + 28$ yang bersilang dengan lengkung $y = x^2 - 4$ pada titik $K(-3, 5)$. TP 4
(a) Hitung luas rantau P.
(b) Cari isi padu janaan, dalam sebutan π, apabila rantau Q diputarkan melalui 360° pada paksi-y.



13. Rajah di sebelah menunjukkan sebahagian daripada lengkung $y = 2x^2 - 3x + c$ dan garis lurus $x = 5$. TP 4
(a) Cari nilai c dan koordinat bagi titik A.
(b) Hitung luas rantau berlorek.
(c) Cari isi padu kisaran, dalam sebutan π, apabila rantau yang dibatasi oleh lengkung $y = 2x^2 - 3x + c$ dan paksi-x diputarkan melalui 180° pada paksi-x.



14. Rajah di sebelah menunjukkan keratan rentas sebuah bekas yang mempunyai permukaan dalaman berbentuk parabola dan penutup yang rata. Permukaan dalam bekas itu boleh diwakili oleh $y = ax^2$. Cari jisim beras, dalam kg, yang boleh disimpan dalam bekas tersebut jika penutup bekas itu dipasang dengan rapi.
[Ketumpatan beras = 1.182 g/cm^3] TP 4



15. Encik Razak bercadang untuk membina sebuah kolam renang di kediamannya. Diberi bahawa kedalaman kolam renang tersebut ialah 1.2 m dan sekata pada seluruh kolam. TP 5

(a) Diberi kadar pengisian air ke dalam kolam renang itu ialah $\frac{dV}{dt} = 3t^2 + 14t$, dengan keadaan V ialah isi padu air, dalam m^3, dan t ialah masa, dalam jam. Encik Razak mengambil masa 5 jam untuk mengisi air ke dalam kolam renang itu. Cari isi padu, dalam m^3, air di dalam kolam renang itu.

(b) Encik Razak ingin mengecat dasar kolam renang itu dengan cat berwarna biru. Kos untuk mengecat ialah RM5 per m^2. Jika Encik Razak memperuntukkan RM1 000 untuk kos mengecat, adakah beliau dapat mengecat keseluruhan dasar kolam renang itu? Berikan sebab.

EKSPLORASI MATEMATIK PBP

Imbas kod *QR* atau layari pautan di sebelah untuk lampiran Kerja Projek yang lengkap.

bit.ly/2Z6DDPa

Pengenalan
Emas merupakan sejenis logam berwarna kuning yang digunakan sebagai mata wang dan mempunyai pengaruh yang besar terhadap kehidupan manusia. Sifat fizikal emas yang berkilat dan tidak teroksida walaupun di dalam air telah menyebabkan barang perhiasan yang diperbuat daripada emas menjadi kegemaran ramai. Emas juga digunakan dalam pelbagai industri lain seperti industri pembuatan komputer, alat komunikasi, kapal angkasa, enjin pesawat jet, kapal terbang dan beberapa hasil pengeluaran yang lain. Harga emas pula sentiasa berubah mengikut masa.

Refleksi
Melalui projek yang telah dijalankan, apakah perkara yang telah anda pelajari? Bagaimanakah anda dapat mengaplikasikan pengetahuan tentang pengamiran dalam kehidupan seharian? Berikan ulasan anda dalam bentuk lembaran pengurusan grafik yang menarik.