BAB 5 TABURAN KEBARANGKALIAN

Apakah yang akan dipelajari?

- Pemboleh Ubah Rawak
- Taburan Binomial
- Taburan Normal

Senarai Standard Pembelajaran

bit.ly/374RxTk

Malaysia mencipta sejarah apabila pemanah yang mewakili negara kita berjaya melayakkan diri ke peringkat akhir dalam Kejohanan Memanah Piala Asia 2019. Dalam pertandingan itu, seorang pemanah mesti memanah sebanyak 72 anak panah dalam 12 fasa dari jarak 70 meter. Masa yang diberikan untuk memanah tiga anak panah ialah dua minit manakala masa yang diberikan untuk menamatkan enam anak panah ialah empat minit. Pada pendapat anda, berapakah kebarangkalian yang mungkin bagi panahan itu? Adakah panahan itu bergantung kepada panahan sebelumnya?

Sudut Maklumat

Girolamo Cardano (1501-1576) merupakan orang pertama yang mengkaji lambungan dadu. Beliau telah menulis senaskhah buku yang mengandungi konsep kebarangkalian yang sistematik dan lengkap.

Pada abad ke-17, dua orang ahli matematik Perancis, iaitu Blaise Pascal dan Pierre de Fermat mengasaskan teori kebarangkalian.

Untuk maklumat lanjut:

bit.ly/3hwGVkR

Kepentingan Bab Ini

- Pengetahuan tentang kebarangkalian memainkan peranan penting dalam sektor pembuatan.
- Proses ini dilakukan dengan hanya menguji beberapa sampel daripada setiap kumpulan beribu-ribu produk agar melepasi ujian kualiti dan tidak memerlukan kos yang tinggi.

Kata Kunci

Pemboleh ubah rawak	*Random variable*
Pemboleh ubah rawak diskret	*Discrete random variable*
Pemboleh ubah rawak selanjar	*Continuous random variable*
Taburan binomial	*Binomial distribution*
Taburan normal	*Normal distribution*
Min	*Mean*
Varians	*Variance*
Sisihan piawai	*Standard deviation*

Video mengenai pemanah Malaysia

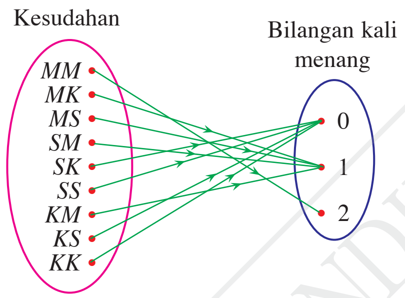
bit.ly/2PQs0aG

5.1 Pemboleh Ubah Rawak

Pemboleh ubah rawak

Dalam suatu pertandingan bola keranjang, keputusan dua permainan boleh direkodkan sebagai menang (M), kalah (K) atau seri (S). Dalam hal ini, ruang sampel boleh ditulis sebagai {MM, MK, MS, SM, SK, SS, KM, KS, KK}. Jika kita hanya mengambil kira dua permainan yang memperoleh kemenangan, maka bilangan kali yang menang terdiri daripada tiada satu pun menang (0), satu kali menang (1) dan dua kali menang (2).

Gambar rajah anak panah di bawah menunjukkan hubungan antara semua kesudahan dalam ruang sampel dengan bilangan kali pasukan bola keranjang menang dalam dua permainan tersebut.



Nombor 0, 1 dan 2 dalam gambar rajah anak panah di atas mewakili bilangan kali menang bagi setiap kesudahan. Set {0, 1, 2} ini ialah contoh **pemboleh ubah rawak** kerana nilainya tidak boleh ditentukan terlebih dahulu dan bergantung kepada peluang.

Imbas Kembali

Ruang sampel ialah satu set yang terdiri daripada semua kesudahan yang mungkin bagi suatu eksperimen.

PERBINCANGAN

Adakah jisim bagi 40 orang murid di dalam sebuah kelas merupakan suatu pemboleh ubah rawak? Jelaskan.

Secara amnya,

> Pemboleh ubah rawak ialah suatu pemboleh ubah dengan nilai berangka yang ditentukan daripada suatu fenomena rawak.

Pemboleh ubah rawak boleh diwakilkan dengan X dan nilai-nilai pemboleh ubah rawak tersebut boleh diwakilkan dengan r. Daripada situasi di atas, pemboleh ubah rawak X bagi bilangan kali menang boleh ditulis dalam tatatanda set, iaitu $X = \{0, 1, 2\}$.

Contoh 1

Nyatakan pemboleh ubah rawak bagi setiap situasi yang berikut.
(a) Sebiji dadu dilambungkan sekali.
(b) Seorang lelaki menunggu bas di sebuah perhentian bas.

Penyelesaian

(a) Pemboleh ubah rawak ialah nombor pada permukaan atas dadu, iaitu {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
(b) Pemboleh ubah rawak ialah tempoh masa menunggu di sebuah perhentian bas.

Latihan Kendiri 5.1

1. Nyatakan pemboleh ubah rawak bagi setiap situasi yang berikut dalam tatatanda set.
   (a) Keputusan bagi pertandingan bola sepak pasukan Malaysia dalam sukan SEA.
   (b) Bilangan kereta berwarna putih di antara lima buah kereta di tempat letak kereta.
   (c) Bilangan kali memperoleh gambar jika sekeping duit syiling dilambungkan tiga kali.
2. Sebiji bola dikeluarkan dari sebuah kotak yang mengandungi beberapa biji bola merah dan bola biru. Selepas warna bola dicatatkan, bola itu dikembalikan semula ke dalam kotak dan proses ini diulang sebanyak empat kali. Jika X mewakili bilangan kali mendapat bola merah dari kotak itu, senaraikan semua kesudahan yang mungkin bagi X dalam tatatanda set.

Pemboleh ubah rawak diskret dan pemboleh ubah rawak selanjar

Terdapat dua jenis pemboleh ubah rawak yang akan dipelajari, iaitu pemboleh ubah rawak diskret dan pemboleh ubah rawak selanjar. Pemboleh ubah rawak diskret mempunyai nilai yang boleh dibilang manakala pemboleh ubah rawak selanjar mengambil semua nilai dalam suatu selang tertentu. Mari teroka perbezaan antara kedua-dua pemboleh ubah rawak ini.

Aktiviti Penerokaan 1

Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Membanding dan membeza pemboleh ubah rawak diskret dan pemboleh ubah rawak selanjar

Langkah:

1. Bahagikan murid kepada dua kumpulan. Kumpulan pertama akan melakukan Aktiviti 1 yang berkaitan dengan pemboleh ubah rawak diskret. Kumpulan kedua akan melakukan Aktiviti 2 yang berkaitan dengan pemboleh ubah rawak selanjar.

Aktiviti 1

1. Sediakan sekeping duit syiling.
2. Lambungkan duit syiling itu tiga kali berturut-turut.
3. Catatkan sama ada anda memperoleh gambar (G) atau angka (A) bagi setiap lambungan.
4. Ulang langkah 2 dan 3.
5. Kemudian, tulis semua nilai yang mungkin bagi pemboleh ubah rawak X yang mewakili bilangan kali gambar yang diperoleh dalam tiga lambungan itu.

Aktiviti 2

1. Ukur ketinggian (dalam cm) semua murid di dalam kelas.
2. Catatkan hasil dapatan anda pada sehelai kertas.
3. Kemudian, tulis julat nilai yang mungkin bagi pemboleh ubah rawak Y yang mewakili ketinggian murid yang diperoleh.

2. Kemudian, bandingkan hasil dapatan kedua-dua kumpulan.
3. Apakah yang dapat anda katakan mengenai nilai pemboleh ubah rawak dan perwakilan pemboleh ubah rawak itu dalam tatatanda set antara pemboleh ubah rawak diskret dengan pemboleh ubah rawak selanjar? Jelaskan.
4. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas dengan menjelaskan perbandingan antara pemboleh ubah rawak diskret dengan pemboleh ubah rawak selanjar.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 1, didapati bahawa:

- Pemboleh ubah rawak yang mempunyai bilangan nilai yang boleh dibilang dan selalu dalam bentuk sifar dan integer positif dikenali sebagai **pemboleh ubah rawak diskret**.
- Pemboleh ubah rawak yang bukan dalam bentuk integer dan nilainya berada dalam suatu selang dikenali sebagai **pemboleh ubah rawak selanjar**.

Jika X mewakili pemboleh ubah rawak diskret, maka kesudahan yang mungkin boleh ditulis dalam bentuk tatatanda set, $X = \{r : r = 0, 1, 2, 3\}$.

Jika pemboleh ubah rawak selanjar diwakili oleh Y, maka kesudahan yang mungkin boleh ditulis dalam bentuk $Y = \{y : y$ ialah tinggi murid dalam cm, $a \leqslant y \leqslant b\}$.

Contoh 2

Tuliskan semua kesudahan yang mungkin dalam bentuk tatatanda set bagi setiap peristiwa yang berikut. Tentukan sama ada peristiwa tersebut ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selanjar. Jelaskan.

(a) Sebiji dadu adil dilambungkan sebanyak tiga kali. Diberi X ialah pemboleh ubah rawak yang mewakili bilangan kali mendapat nombor 4.

(b) X ialah pemboleh ubah rawak yang mewakili masa yang diambil oleh seorang murid menunggu bas di sebuah perhentian bas. Julat masa yang diambil oleh seorang murid adalah antara 5 minit hingga 55 minit.

Penyelesaian

(a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$. Peristiwa ini ialah pemboleh ubah rawak diskret kerana nilai pemboleh ubah rawak yang diperoleh boleh dibilang.

(b) $X = \{x : x$ ialah masa dalam minit, $5 \leqslant x \leqslant 55\}$. Peristiwa ini ialah pemboleh ubah rawak selanjar kerana nilai pemboleh ubah rawak berada dalam selang masa antara 5 minit hingga 55 minit.

Latihan Kendiri 5.2

1. Tuliskan semua kesudahan yang mungkin dalam bentuk tatatanda set bagi setiap peristiwa yang berikut. Tentukan sama ada peristiwa tersebut ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selanjar.
   (a) Enam orang pengawas dipilih secara rawak daripada murid-murid Tingkatan 5. X mewakili bilangan pengawas yang memakai cermin mata.
   (b) Tujuh orang pesakit dipilih secara rawak dari sebuah hospital untuk melakukan ujian darah. X mewakili bilangan pesakit yang kurang berkemampuan.
   (c) Bangunan yang paling rendah di bandar Seroja ialah 3 m dan yang paling tinggi ialah 460 m. X mewakili tinggi bangunan yang terdapat di bandar Seroja.

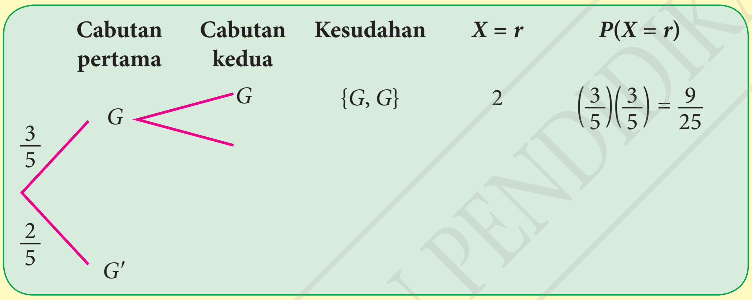
Taburan kebarangkalian pemboleh ubah rawak diskret

Aktiviti Penerokaan 2 Berpasangan

Tujuan: Menerangkan maksud taburan kebarangkalian pemboleh ubah rawak diskret X melalui gambar rajah pokok

Langkah:

1. Sediakan lima keping kertas bersaiz segi empat sama dan tuliskan nombor 1 hingga 5 di atas setiap kepingan kertas itu.
2. Masukkan lima keping kertas itu di dalam sebuah kotak kecil.
3. Keluarkan sekeping kertas dari kotak itu secara rawak dan catatkan nombor yang terdapat pada kepingan kertas. Kemudian, kembalikan kertas ke dalam kotak sebelum sekeping kertas lagi diambil dari kotak itu. Proses ini diulang sebanyak 2 kali.
4. Katakan X mewakili bilangan kali mendapat nombor ganjil. Tuliskan
   (a) semua kesudahan yang mungkin bagi X dalam dua cabutan itu,
   (b) kebarangkalian mendapat nombor ganjil bagi setiap cabutan.
5. Kemudian, lengkapkan gambar rajah pokok di bawah.



6. Daripada gambar rajah pokok yang diperoleh, cari
   (a) kebarangkalian bagi setiap nilai X,
   (b) jumlah kebarangkaliannya.
7. Buat satu kesimpulan tentang nilai kebarangkalian pemboleh ubah rawak X dan jumlah kebarangkalian bagi taburan ini.

Imbas Kembali

- Kebarangkalian peristiwa A berlaku, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ dengan keadaan $n(A)$ ialah bilangan kesudahan bagi peristiwa A dan $n(S)$ ialah bilangan kesudahan bagi ruang sampel S.
- Kebarangkalian peristiwa A berlaku adalah antara 0 hingga 1, iaitu $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- Jika A' ialah pelengkap bagi peristiwa A, maka $P(A') = 1 - P(A)$.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 2, nilai yang mungkin bagi X ialah 0, 1 dan 2. Setiap nombor ini mewakili satu peristiwa dalam ruang sampel $\{(G, G), (G, G'), (G', G), (G', G')\}$. Kebarangkalian setiap peristiwa boleh diringkaskan dalam bentuk jadual taburan kebarangkalian X seperti yang ditunjukkan dalam jadual di sebelah. Secara amnya,

$X = r$	0	1	2
$P(X = r)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

Jika X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan nilai $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ dan kebarangkalian masing-masing ialah $P(X = r_1), P(X = r_2), P(X = r_3), \ldots, P(X = r_n)$, maka $\sum_{i=1}^{n} P(X = r_i) = 1$, dengan keadaan setiap $P(X = r_i) \geqslant 0$.

Contoh 3

Dua biji dadu adil dilambungkan serentak sebanyak tiga kali. Katakan X ialah pemboleh ubah rawak diskret untuk mendapat 7 daripada hasil tambah dadu pertama dan dadu kedua.

(a) Tuliskan nilai X dalam bentuk tatatanda set.

(b) Lukis gambar rajah pokok untuk mewakili semua kesudahan yang mungkin bagi X.

(c) Daripada gambar rajah pokok di (b), kira kebarangkalian bagi setiap nilai X yang mungkin.

(d) Tentukan jumlah taburan kebarangkalian bagi X.

Penyelesaian

(a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$

(b) Katakan R ialah mendapat hasil tambah 7 dan T ialah mendapat hasil tambah bukan 7.

Dadu pertama

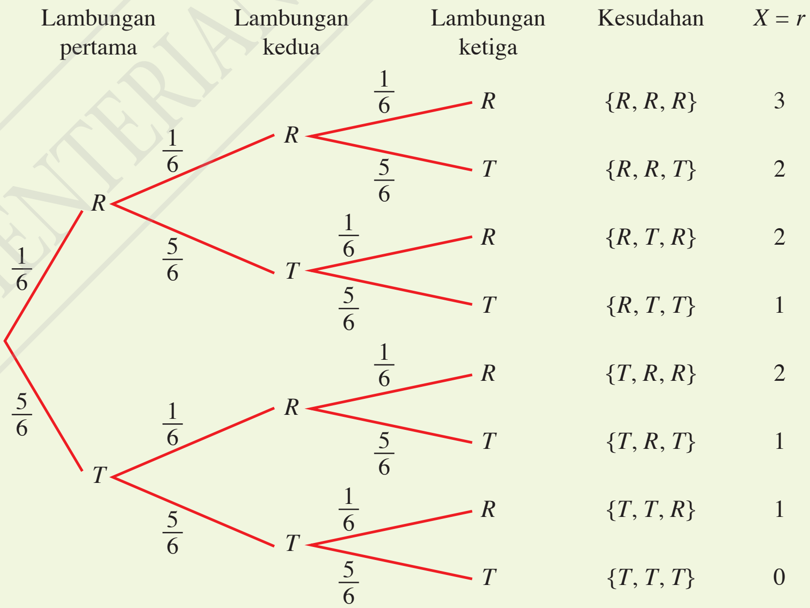
+ (Dadu kedua)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tip Pintar

Dengan menggunakan petua pendaraban,
$^6C_1 \times {^6C_1} = 36$

Maka, bilangan kesudahan dalam ruang sampel, $n(S)$ bagi Contoh 3 ialah 36.

Daripada jadual di atas, kebarangkalian mendapat hasil tambah 7 dalam setiap percubaan ialah $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.



(c) $P(X = 0)$
$= P(T, T, T)$
$= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$
$= \frac{125}{216}$
$= 0.5787$

$P(X = 1)$
$= P(R, T, T) + P(T, R, T) + P(T, T, R)$
$= \left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right)$
$= \frac{75}{216}$
$= 0.3472$

$P(X = 2)$
$= P(R, R, T) + P(R, T, R) + P(T, R, R)$
$= \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}\right)$
$= \frac{15}{216}$
$= 0.0695$

$P(X = 3)$
$= P(R, R, R)$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$
$= \frac{1}{216}$
$= 0.0046$

(d) Jumlah kebarangkalian $= \frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216}$
$= 1$

Tip Pintar

Dalam Contoh 3,
$P(X = 1) = {}^3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2$
$= 0.3472$
$P(X = 2) = {}^3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1$
$= 0.0695$

BAB 5

Latihan Kendiri 5.3

1. Dalam sebuah dewan mini, terdapat tiga suis untuk menghidupkan tiga buah kipas. X mewakili bilangan suis yang dihidupkan dalam satu masa.
(a) Tuliskan X dalam bentuk tatatanda set.
(b) Lukis gambar rajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin dan cari kebarangkalian masing-masing.
(c) Tentukan jumlah taburan kebarangkalian bagi X.

2. Pada tahun 2016, didapati bahawa 38% kereta yang dibeli oleh sebahagian rakyat Malaysia berwarna putih. Jika dua orang pembeli dipilih secara rawak dan X mewakili bilangan pembeli kereta putih,
(a) nyatakan set X,
(b) lukis gambar rajah pokok dan tentukan taburan kebarangkalian bagi X.

3. Sekeping duit syiling dilambungkan sebanyak tiga kali dan X mewakili bilangan kali mendapat gambar.
(a) Tuliskan X dalam bentuk tatatanda set.
(b) Lukis gambar rajah pokok untuk mewakili semua kesudahan yang mungkin bagi X.
(c) Tunjukkan bahawa X ialah pemboleh ubah rawak diskret.

Jadual dan graf taburan kebarangkalian pemboleh ubah rawak diskret

Selain gambar rajah pokok, taburan kebarangkalian setiap pemboleh ubah rawak diskret X boleh diwakilkan dengan jadual dan graf. Jadual dan graf akan memaparkan nilai pemboleh ubah rawak yang mungkin berserta kebarangkalian yang sepadan bagi setiap satu.

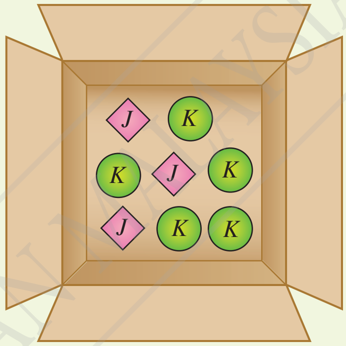
Contoh 4

Di sebuah kilang, seorang penyelia ingin memeriksa kualiti suatu jenis produk secara rawak. Terdapat 3 buah produk J dan 5 buah produk K di dalam sebuah kotak. Penyelia itu akan mengambil satu produk secara rawak dan jenis produk akan dicatatkan. Produk tersebut akan dimasukkan semula ke dalam kotak dan proses pemeriksaan kualiti produk ini akan dilakukan sebanyak tiga kali. Katakan X mewakili bilangan kali produk K diperiksa.

(a) Tuliskan X dalam bentuk tatatanda set.

(b) Lukis satu gambar rajah pokok untuk mewakilkan semua kesudahan yang mungkin bagi X.

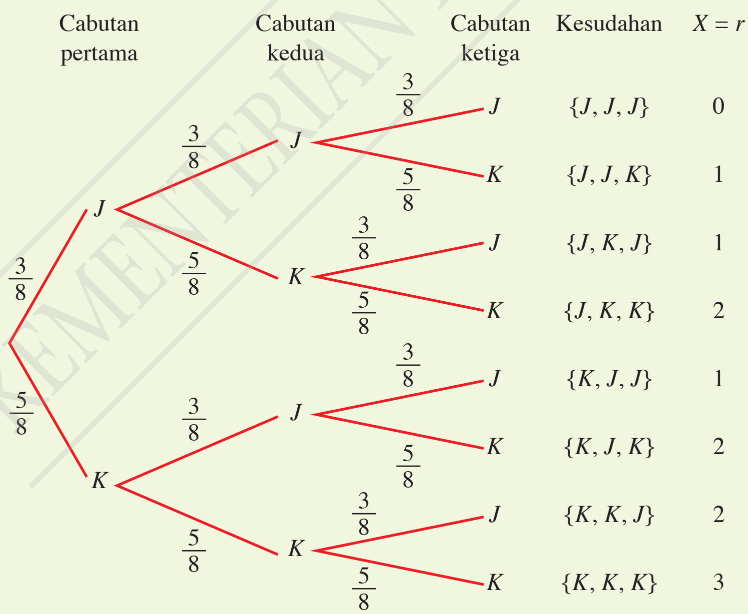
(c) Senaraikan taburan nilai X serta kebarangkalian masing-masing dalam satu jadual dan seterusnya lukis satu graf untuk mewakili taburan kebarangkalian X.



Penyelesaian

(a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$

(b)



Tip Pintar

Produk kedua atau ketiga yang dipilih tidak bergantung kepada jenis produk yang dipilih sebelumnya kerana produk telah dikembalikan ke dalam kotak. Peristiwa ini adalah tidak bersandar.

Kuiz Pantas

Jika produk pertama yang dipilih tidak dikembalikan ke dalam kotak, adakah kebarangkalian mendapat sebuah produk selepas itu masih sama? Jika tidak, cari kebarangkalian bagi cabutan kedua dan ketiga untuk mendapat produk K.

(c) $P(X = 0)$

$= P(J, J, J)$

$= \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}$

$= \frac{27}{512}$

$= 0.0527$

$P(X = 1)$

$= P(J, J, K) + P(J, K, J) + P(K, J, J)$

$= \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}\right)$

$= \frac{135}{512}$

$= 0.2637$

$P(X = 2)$

$= P(J, K, K) + P(K, J, K) + P(K, K, J)$

$= \left(\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8}\right)$

$= \frac{225}{512}$

$= 0.4395$

$P(X = 3)$

$= P(K, K, K)$

$= \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{5}{8}$

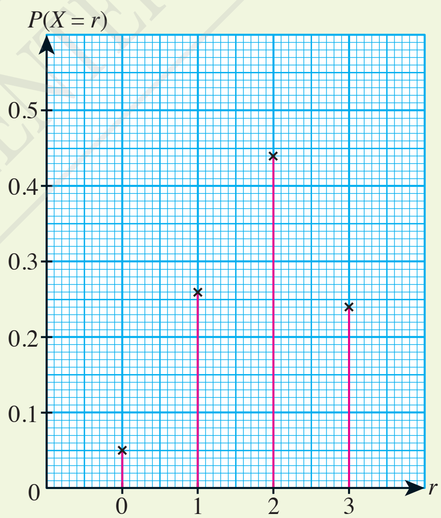
$= \frac{125}{512}$

$= 0.2441$

Wakilkan taburan kebarangkalian yang mungkin bagi X dalam bentuk jadual:

$X = r$	0	1	2	3
$P(X = r)$	0.0527	0.2637	0.4395	0.2441

Wakilkan taburan kebarangkalian yang mungkin bagi X dalam bentuk graf $P(X = r)$ melawan r:



Kaedah Alternatif

Untuk $P(X = 1)$, peristiwa memperoleh produk K boleh berlaku pada cabutan pertama, kedua atau ketiga. Jadi, konsep gabungan boleh digunakan.

${}^3C_1\left(\frac{5}{8}\right)^1\left(\frac{3}{8}\right)^2 = 3\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^2$

$= \frac{135}{512}$

$= 0.2637$

Kuiz Pantas

Menggunakan konsep gabungan, cari
(a) $P(X = 0)$
(b) $P(X = 2)$
(c) $P(X = 3)$

Kuiz Pantas

Daripada jadual dan graf dalam Contoh 4, berapakah jumlah taburan kebarangkalian bagi X?

BAB 5

Contoh 5

70% daripada murid Tingkatan 5 Dahlia memperoleh gred A dalam ujian akhir tahun bagi mata pelajaran Sains. Dua orang murid dipilih secara rawak daripada murid-murid kelas itu. Jika X mewakili bilangan murid yang tidak mendapat gred A, bina jadual untuk menunjukkan nilai yang mungkin bagi X dengan taburan kebarangkalian masing-masing. Seterusnya, lukis satu graf yang menunjukkan taburan kebarangkalian X.

Penyelesaian

$P(A$: A ialah murid yang tidak mendapat gred A$) = 1 - \dfrac{70}{100} = 0.3$

$P(B$: B ialah murid yang mendapat gred A$) = \dfrac{70}{100} = 0.7$

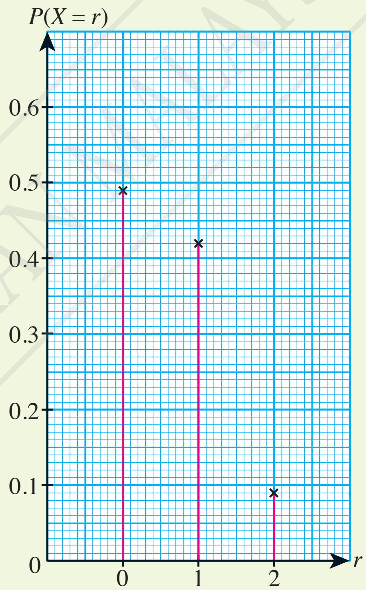
Jadi, $X = \{0, 1, 2\}$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(B, B) \\ &= 0.7 \times 0.7 \\ &= 0.49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A, B) + P(B, A) \\ &= (0.3 \times 0.7) + (0.7 \times 0.3) \\ &= 0.42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(A, A) \\ &= 0.3 \times 0.3 \\ &= 0.09 \end{aligned}$$

$X = r$	0	1	2
$P(X = r)$	0.49	0.42	0.09



Latihan Kendiri 5.4

1. 6 daripada 10 orang murid yang dipilih secara rawak menyertai kem kepimpinan peringkat daerah. Jika 5 orang dipilih secara rawak daripada kumpulan murid itu dan X mewakili bilangan murid yang menyertai kem kepimpinan itu, lukis satu graf untuk mewakili taburan kebarangkalian X.

2. Didapati bahawa 59% daripada calon peperiksaan kemasukan ke sekolah berasrama penuh lulus dalam semua mata pelajaran. 4 orang murid dipilih secara rawak daripada kesemua calon dan X mewakili bilangan murid yang lulus dalam semua mata pelajaran mereka.
(a) Bina satu jadual taburan kebarangkalian bagi X.
(b) Seterusnya, lukis graf taburan kebarangkalian bagi X.

3. Terdapat 2 biji bola keranjang dan 4 biji bola sepak di dalam sebuah kotak. 4 biji bola dikeluarkan secara rawak dari kotak itu satu demi satu dan bola dikembalikan semula selepas jenis bola dicatatkan. Jika X mewakili bilangan bola keranjang yang dikeluarkan dari kotak itu, lukis graf taburan kebarangkalian bagi X.

Kuiz bit.ly/2SmNJbZ

Latihan Formatif 5.1

1. Satu kumpulan debat sekolah terdiri daripada 6 orang ahli dengan 2 daripada ahli kumpulan itu ialah lelaki. 2 orang ahli kumpulan debat itu dipilih secara rawak untuk menyertai suatu pertandingan dan X mewakili bilangan ahli kumpulan lelaki.
   (a) Senaraikan semua nilai yang mungkin bagi X.
   (b) Nyatakan sama ada X ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selanjar.

2. Didapati bahawa paku terpanjang yang dihasilkan oleh sebuah kilang ialah 10.2 cm dan paku terpendek ialah 1.2 cm. Jika X mewakili pemboleh ubah rawak bagi panjang paku yang dihasilkan oleh kilang itu,
   (a) senaraikan semua nilai yang mungkin bagi X,
   (b) nyatakan sama ada X ialah pemboleh ubah rawak diskret atau pemboleh ubah rawak selanjar.

3. Diberi $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret yang mewakili bilangan komputer di sebuah pejabat dengan nilai bagi fungsi kebarangkalian masing-masing ditunjukkan dalam jadual di bawah.

$X = r$	0	1	2	3
$P(X = r)$	0.2	0.35	0.3	0.15

   (a) Tunjukkan bahawa X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan fungsi kebarangkalian $P(X = r)$.
   (b) Lukis graf taburan kebarangkalian bagi X.

4. Sebuah kotak mengandungi beberapa biji bola pingpong. Setiap bola pingpong itu dilabel dengan angka 1 hingga 10. Kebarangkalian mendapat angka 1, 3 atau 5 ialah 0.2 manakala kebarangkalian mendapat angka 2, 4, 6 atau 8 ialah 0.1. Sebiji bola pingpong dikeluarkan secara rawak dari kotak itu dan bola dikembalikan ke dalam kotak selepas angka dicatatkan. Proses ini diulang sebanyak 3 kali. Jika X mewakili bilangan kali mendapat angka 1, 3 atau 5,
   (a) senaraikan semua nilai bagi pemboleh ubah rawak X,
   (b) tunjukkan bahawa X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan fungsi kebarangkalian $P(X = r)$,
   (c) lukis graf taburan kebarangkalian bagi X.

5. Diberi $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret dengan kebarangkaliannya diberi dalam jadual di bawah.

$X = r$	0	1	2	3	4
$P(X = r)$	p	p	$p + q$	q	q

   Jika $p = 2q$, cari nilai p dan q.

6. Dalam suatu permainan catur, pemain akan diberi 1 mata jika menang. $\frac{1}{2}$ mata akan diberi jika seri dan 0 mata akan diberi jika kalah. Lee bermain tiga set permainan catur.
   (a) Bina gambar rajah pokok untuk mewakilkan semua kesudahan yang mungkin.
   (b) Jika X mewakili bilangan mata yang diperoleh Lee, senaraikan set X.
   (c) Lukiskan graf bagi taburan kebarangkalian X.

5.2 Taburan Binomial

Taburan binomial

Pertimbangkan situasi yang berikut:

> Apabila sekeping duit syiling adil dilambungkan sekali, kesudahan yang diperoleh adalah sama ada gambar atau angka.

Perhatikan bahawa situasi di atas menghasilkan hanya dua kesudahan yang mungkin, iaitu mendapat gambar atau mendapat angka. Jika kesudahan mendapat gambar dianggap sebagai 'kejayaan', maka kesudahan mendapat angka dianggap sebagai 'kegagalan'. Suatu eksperimen yang menghasilkan hanya dua kesudahan yang mungkin dikenali sebagai **percubaan Bernoulli**. Ciri-ciri percubaan Bernoulli adalah seperti berikut:

- Hanya terdapat dua kesudahan yang mungkin, iaitu 'kejayaan' dan 'kegagalan'.
- Kebarangkalian 'kejayaan' sentiasa sama dalam setiap percubaan.
- Jika kebarangkalian 'kejayaan' diberi oleh p, maka kebarangkalian 'kegagalan' diberi oleh $(1 - p)$ dengan $0 < p < 1$.
- Pemboleh ubah rawak diskret $X = \{0, 1\}$, dengan keadaan 0 mewakili 'kegagalan' dan 1 mewakili 'kejayaan'.

Eksperimen yang terdiri daripada n percubaan Bernoulli yang serupa dikenali sebagai eksperimen binomial. Mari teroka perkaitan antara percubaan Bernoulli dengan taburan Binomial.

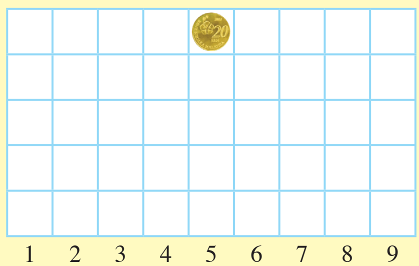
Aktiviti Penerokaan 3 Berkumpulan

Tujuan: Meneroka perkaitan antara percubaan Bernoulli dengan taburan binomial

Langkah:

1. Sediakan sekeping kertas sebak, sebiji dadu adil dan sekeping duit syiling adil.

2. Lukis petak grid yang terdiri daripada lima baris dan sembilan lajur seperti yang ditunjukkan dalam rajah di sebelah.



3. Letakkan sekeping duit syiling pada petak yang berada pada baris pertama dan lajur kelima.

4. Lambungkan dadu sekali dan gerakkan duit syiling mengikut syarat berikut:

> - Jika nombor ganjil muncul, gerakkan duit syiling satu petak ke bawah dan satu petak ke kiri.
> - Jika nombor genap muncul, gerakkan duit syiling satu petak ke bawah dan satu petak ke kanan.

5. Lakukan lambungan dadu sebanyak empat kali supaya duit syiling tersebut digerakkan sehingga berada di baris kelima.

6. Seterusnya, jawab soalan yang berikut.
   (a) Adakah lambungan dadu merupakan percubaan Bernoulli?
   (b) Apakah perkaitan antara setiap lambungan dadu? Adakah setiap lambungan dadu bersandar dengan lambungan dadu sebelumnya?
   (c) Berapakah jenis kesudahan yang diperoleh bagi setiap lambungan? Senaraikan.
   (d) Jika pemboleh ubah rawak diskret X mewakili bilangan kali mendapat nombor genap pada setiap lambungan dadu, tuliskan nilai bagi X dalam bentuk tatatanda set.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 3, dapat diperhatikan bahawa:

- Eksperimen terdiri daripada 4 percubaan Bernoulli yang serupa.
- Setiap percubaan hanya mempunyai dua kesudahan, iaitu 'kejayaan' dan 'kegagalan'.
- Kebarangkalian 'kejayaan' bagi setiap percubaan adalah tidak berubah.
- Setiap percubaan adalah tidak bersandar, iaitu kesudahan suatu percubaan tidak memberi kesan kepada kesudahan yang lain.

Ciri-ciri yang dinyatakan di atas dikenali sebagai **eksperimen binomial**. Secara amnya,

Pemboleh ubah rawak binomial ialah bilangan kejayaan r daripada n percubaan Bernoulli yang serupa bagi suatu eksperimen binomial. Taburan kebarangkalian bagi pemboleh ubah rawak binomial ini dikenali sebagai **taburan binomial**.

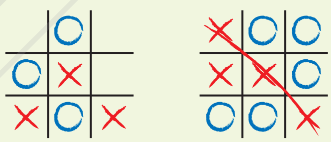
GALERI SEJARAH

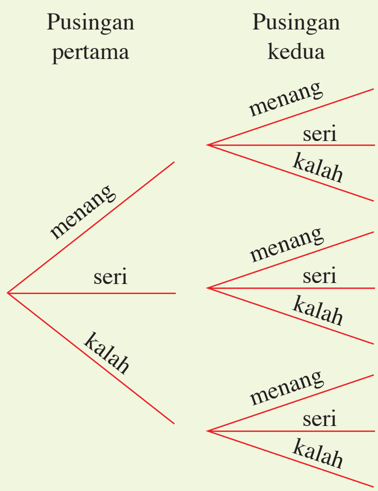
Jacob Bernoulli ialah ahli matematik Swiss pada abad ke-17. Beliau mengkaji ciri-ciri percubaan yang mempunyai kebarangkalian kesudahan kejayaan yang sentiasa sama apabila percubaan diulang.

BAB 5

Contoh 6

Rajah di sebelah menunjukkan gambar rajah pokok yang mewakili semua kesudahan bagi dua pusingan suatu permainan *tic-tac-toe*. Adakah taburan ini merupakan taburan binomial? Jelaskan.





Penyelesaian

Taburan ini mempunyai tiga kesudahan yang mungkin, iaitu menang, seri atau kalah. Maka, taburan ini bukan taburan binomial kerana taburan binomial hanya mempunyai dua kesudahan sahaja dalam setiap percubaan.

5.2.1

Contoh 7

Sebuah rak mengandungi 6 naskhah buku rujukan Kimia yang sama dan 4 naskhah buku rujukan Fizik yang sama. 3 naskhah buku rujukan Fizik diambil secara rawak satu demi satu dari rak itu tanpa dikembalikan. Nyatakan sama ada taburan kebarangkalian ini merupakan taburan binomial atau bukan. Jelaskan.

Penyelesaian

P(mengambil senaskhah buku rujukan Fizik pertama) $= \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

P(mengambil senaskhah buku rujukan Fizik kedua) $= \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

P(mengambil senaskhah buku rujukan Fizik ketiga) $= \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Kebarangkalian mengambil senaskhah buku rujukan Fizik dalam setiap percubaan berubah dan setiap kesudahan bersandar kepada kesudahan sebelumnya.

Maka, taburan kebarangkalian mengambil 3 naskhah buku rujukan Fizik berturut-turut tanpa dikembalikan ini bukan taburan binomial.

Tip Pintar

Suatu eksperimen dengan keadaan n ialah 1 merupakan percubaan Bernoulli.

Latihan Kendiri 5.5

1. Diberi X ialah pemboleh ubah rawak diskret bagi percubaan Bernoulli dengan kebarangkalian 'kejayaan' ialah 0.3.
   (a) Senaraikan unsur dalam set X.
   (b) Cari kebarangkalian 'kegagalan'.
2. Satu eksperimen dijalankan dengan melambungkan sekeping duit syiling 50 sen pada percubaan pertama dan melambungkan sebiji dadu pada percubaan kedua. Jelaskan sama ada eksperimen ini merupakan eksperimen binomial atau bukan.
3. Sebuah persatuan melakukan tinjauan tentang jumlah upah sebulan yang diperoleh kebanyakan rakyat Malaysia yang bekerja. Hasil tinjauan yang dilakukan mendapati bahawa 50% daripada rakyat Malaysia yang bekerja mendapat upah kurang daripada RM2 000 sebulan. Jika 3 orang pekerja dipilih secara rawak daripada satu kumpulan pekerja, jelaskan sama ada taburan kebarangkalian ini bertaburan secara binomial atau bukan.
4. Dalam satu kajian, didapati bahawa 9 daripada 10 orang pelajar di sebuah kolej melakukan pekerjaan sambilan. Jika 4 orang pelajar dipilih secara rawak dari kolej itu, adakah taburan kebarangkalian bagi pelajar yang melakukan pekerjaan sambilan bertaburan secara binomial? Jelaskan.
5. Didapati bahawa seorang murid lepasan SPM mempunyai tiga pilihan, iaitu menyambung pelajaran di dalam negara, menyambung pelajaran di luar negara atau tidak menyambung pelajaran. Seorang murid dipilih secara rawak daripada kumpulan murid itu. Lukis satu gambar rajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin. Jelaskan sama ada kesudahan itu merupakan taburan binomial.

Kebarangkalian suatu peristiwa bagi taburan binomial

Jika pemboleh ubah rawak binomial X mewakili bilangan kali ‘kejayaan’ dalam n percubaan yang tidak bersandar bagi satu eksperimen, dengan keadaan p ialah kebarangkalian ‘kejayaan’, $q = 1 - p$ ialah kebarangkalian ‘kegagalan’, maka fungsi kebarangkalian binomial bagi X diberi oleh rumus:

$$P(X = r) = {}^{n}C_{r}\, p^{r} q^{n-r},\ r = 1, 2, 3, \ldots, n$$

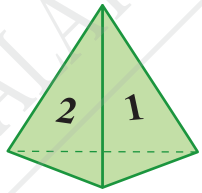
Tip Pintar

Peristiwa memperoleh kejayaan atau kegagalan ialah peristiwa saling eksklusif.

Jadi, kita tulis sebagai $X \sim \mathrm{B}(n, p)$.

Pertimbangkan peristiwa yang berikut:

Sebuah piramid segi tiga dengan empat permukaan rata yang sama saiz dilabel dengan nombor 1 hingga 4. Naim melambungkan piramid segi tiga itu sebanyak 3 kali. Apakah kebarangkalian mendapat nombor 4 pada tapak piramid itu dalam setiap lambungan?



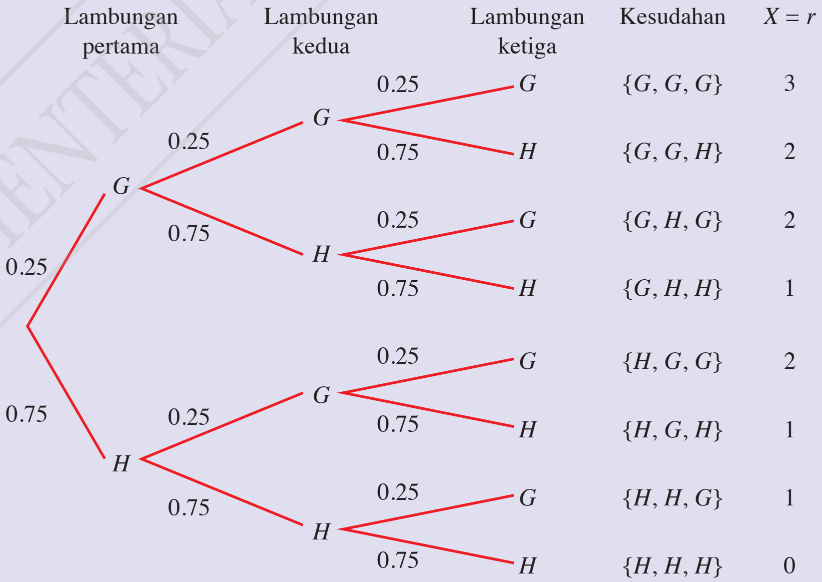
Perhatikan bahawa lambungan sebuah piramid segi tiga sebanyak 3 kali merupakan suatu eksperimen binomial dengan $n = 3$. Jadi, kebarangkalian mendapat nombor 4 dalam setiap percubaan ialah:

$$p = \frac{1}{4} = 0.25 \qquad \text{dan} \qquad q = (1 - p) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Jika X mewakili pemboleh ubah rawak bilangan kali mendapat nombor 4 pada tapak piramid, maka $X = \{0, 1, 2, 3\}$.

Katakan, G = kesudahan mendapat nombor 4 pada tapak piramid
dan H = kesudahan mendapat nombor bukan 4 pada tapak piramid

Kesudahan yang mungkin bagi lambungan sebuah piramid segi tiga dapat diperoleh menggunakan gambar rajah pokok seperti di bawah.



Jadual di bawah menunjukkan semua kesudahan dan taburan kebarangkalian masing-masing berdasarkan gambar rajah pokok dan rumus taburan binomial.

<table>
<tr><th></th><th>Daripada gambar rajah pokok</th><th>Menggunakan rumus taburan binomial</th></tr>
<tr><td>$X = r$</td><td>$P(X = r)$</td><td>$P(X = r)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$P(X = 0) = P(H, H, H)$
$= 0.75^3$
$= 0.4219$</td><td>${}^3C_0(0.25)^0(0.75)^3 = 0.4219$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$P(X = 1) = P(G, H, H) + P(H, G, H) + P(H, H, G)$
$= 3(0.75)^2(0.25)$
$= 0.4219$</td><td>${}^3C_1(0.25)^1(0.75)^2 = 0.4219$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$P(X = 2) = P(G, G, H) + P(G, H, G) + P(H, G, G)$
$= 3(0.75)(0.25)^2$
$= 0.1406$</td><td>${}^3C_2(0.25)^2(0.75)^1 = 0.1406$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$P(X = 3) = P(G, G, G)$
$= (0.25)^3$
$= 0.0156$</td><td>${}^3C_3(0.25)^3(0.75)^0 = 0.0156$</td></tr>
</table>

Perhatikan bahawa kedua-dua kaedah, iaitu menggunakan gambar rajah pokok dan rumus taburan binomial menghasilkan nilai kebarangkalian yang sama bagi setiap pemboleh ubah rawak X. Namun, gambar rajah pokok akan menjadi lebih rumit untuk dilukis jika lambungan melebihi tiga kali.

Bagi kebarangkalian mendapat nombor 4 pada tapak piramid kurang daripada 2 kali,

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
$= 0.4219 + 0.4219$
$= 0.8438$

Bagi kebarangkalian mendapat nombor 4 pada tapak piramid lebih besar daripada 0 kali,

$P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
$= 1 - P(X = 0)$
$= 1 - 0.4219$
$= 0.5781$

Daripada jadual di atas, hasil tambah kebarangkalian bagi semua pemboleh ubah rawak X:

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
$= 0.4219 + 0.4219 + 0.1406 + 0.0156$
$= 1$

Secara amnya,

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = r_i) = 1$$

Akses QR

Pembuktian $\sum_{i=1}^{n} P(X = r_i) = 1$

bit.ly/38VWI9G

Kuiz Pantas

Apakah kebarangkalian bagi mendapat nombor 4 pada tapak piramid adalah kurang daripada 1 kali atau lebih besar daripada 2 kali?

Contoh 8

Kebarangkalian bahawa hujan akan turun pada suatu hari tertentu ialah 0.45. Dengan menggunakan rumus, cari kebarangkalian bahawa dalam suatu minggu tertentu, hujan akan turun
(a) tepat 4 hari,
(b) sekurang-kurangnya 2 hari.

Penyelesaian

Katakan X mewakili bilangan hari hujan.
Diberi $n = 7$, $p = 0.45$ dan $q = 0.55$.

(a) $P(X = 4) = {}^7C_4(0.45)^4(0.55)^3$
$= 0.2388$

(b) $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$
$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$
$= 1 - [{}^7C_0(0.45)^0(0.55)^7 + {}^7C_1(0.45)^1(0.55)^6]$
$= 1 - 0.0152 - 0.0872$
$= 0.8976$

Tip Pintar

${}^nC_r$ bermaksud dalam n bilangan percubaan, mana-mana r kali 'kejayaan' dipilih. Berdasarkan Contoh 8(a), dalam 7 hari, 4 hari dipilih.

Pilih 4 daripada 7

${}^7C_4(0.45)^4(0.55)^3$

4 kali kebarangkalian 'kejayaan'

3 kali kebarangkalian 'kegagalan'

Latihan Kendiri 5.6

1. Pada tahun 2019, anggaran bilangan penduduk Malaysia ialah 32.6 juta orang. Dalam satu kajian yang dilakukan, didapati bahawa lebih kurang 57% daripada rakyat Malaysia menggunakan telefon pintar. Satu sampel yang terdiri daripada 8 orang dipilih secara rawak. Cari kebarangkalian bahawa
(a) 6 orang menggunakan telefon pintar,
(b) tidak lebih daripada 2 orang menggunakan telefon pintar.

2. Sebuah rak mengandungi 3 naskhah buku cerita dan 2 naskhah buku komik. Senaskhah buku diambil dan selepas dibaca, buku itu dikembalikan sebelum senaskhah buku lagi diambil dari rak itu. Proses ini diulang sebanyak 3 kali. Jika X mewakili pemboleh ubah rawak mendapat senaskhah buku komik,
(a) bina gambar rajah pokok untuk menunjukkan semua kesudahan yang mungkin,
(b) cari kebarangkalian mendapat
(i) buku komik hanya sekali, (ii) buku cerita sebanyak tiga kali.

3. Dalam satu kajian, didapati bahawa 95% daripada pelajar sarjana muda di sebuah universiti memiliki sebuah komputer riba. Satu sampel yang terdiri daripada 8 orang pelajar sarjana muda dipilih secara rawak dari universiti itu, cari kebarangkalian bahawa
(a) tepat 6 orang pelajar sarjana muda memiliki sebuah komputer riba,
(b) selebih-lebihnya 2 orang atau lebih daripada 7 orang pelajar sarjana muda memiliki komputer riba.

4. Diberi satu pemboleh ubah rawak $X \sim B(n, 0.65)$.
(a) Cari nilai n jika $P(X = n) = 0.0319$.
(b) Berdasarkan jawapan di (a), cari $P(X > 2)$.

Membina jadual, melukis graf dan mentafsir maklumat taburan binomial

Aktiviti Penerokaan 4

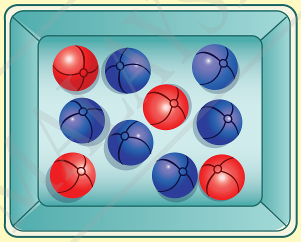
Berkumpulan | PAK-21 | STEM | PK

Tujuan: Membina jadual, melukis graf dan mentafsir maklumat taburan binomial

ggbm.at/aprtyguy

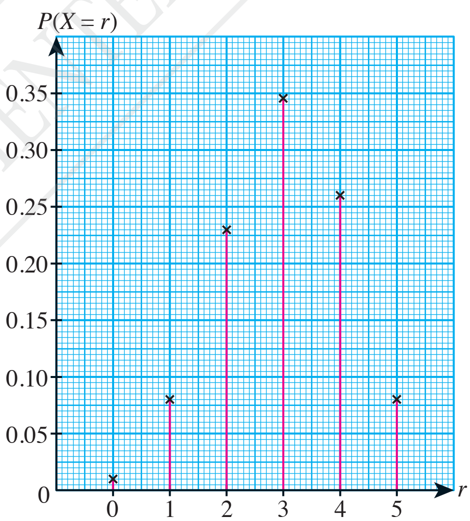
Langkah:

1. Bentukkan beberapa kumpulan yang terdiri daripada empat orang ahli.
   - Sediakan sebuah bekas. Masukkan 4 biji bola merah dan 6 biji bola biru ke dalam bekas tersebut.
   - Seorang ahli kumpulan akan mengeluarkan sebiji bola secara rawak dari bekas tersebut.
   - Ahli yang lain akan merekodkan warna bola yang dikeluarkan dan bola itu akan dimasukkan semula ke dalam bekas.
   - Proses ini diulang sebanyak lima kali.



2. Katakan X ialah pemboleh ubah rawak mengeluarkan sebiji bola berwarna biru, dengan menggunakan rumus $P(X = r) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$, dengan keadaan $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, bina jadual taburan kebarangkalian.
3. Seterusnya, bina graf taburan kebarangkalian menggunakan perisian geometri dinamik GeoGebra dengan mengimbas kod *QR* atau layari pautan yang disediakan.
4. Daripada jadual kebarangkalian dan graf yang dibina, cari kebarangkalian yang berikut.
   (a) $P(X = 3)$, (b) $P(X < 3)$, (c) $P(1 < X < 3)$.
5. Bagaimanakah anda menentukan kebarangkalian daripada jadual dan graf?
6. Bentangkan hasil dapatan kumpulan anda di hadapan kelas.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 4, didapati bahawa kebarangkalian pemboleh ubah rawak X bagi taburan binomial dapat diperoleh daripada jadual dan graf taburan kebarangkalian. Graf taburan kebarangkalian boleh dilukis seperti rajah di bawah.



Tip Pintar

Untuk sebarang n bagi suatu taburan binomial:
- Apabila $p = 0.5$, bentuk graf adalah simetri.
- Apabila $p < 0.5$, graf bergerak ke kiri dan tidak simetri.
- Apabila $p > 0.5$, graf bergerak ke kanan dan tidak simetri.

Contoh 9

Emma melakukan tinjauan tentang peratus murid di sekolahnya yang menaiki bas sekolah. Didapati bahawa 45% daripada murid di sekolahnya menaiki bas sekolah. Satu sampel yang terdiri daripada 4 orang murid dipilih secara rawak dari sekolah itu.

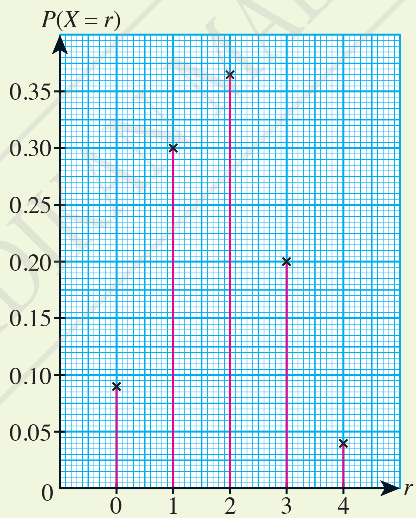
(a) Bina jadual taburan kebarangkalian binomial bagi bilangan murid yang menaiki bas sekolah.
(b) Lukis graf bagi taburan ini.
(c) Daripada jadual atau graf, cari kebarangkalian
   (i) lebih daripada 3 orang murid menaiki bas sekolah,
   (ii) kurang daripada 2 orang murid menaiki bas sekolah.

Penyelesaian

(a) Katakan X mewakili bilangan murid yang menaiki bas sekolah.
Maka, $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Diberi $n = 4$, $p = 0.45$ dan $q = 0.55$

$X = r$	$P(X = r)$
0	${}^4C_0(0.45)^0(0.55)^4 = 0.0915$
1	${}^4C_1(0.45)^1(0.55)^3 = 0.2995$
2	${}^4C_2(0.45)^2(0.55)^2 = 0.3675$
3	${}^4C_3(0.45)^3(0.55)^1 = 0.2005$
4	${}^4C_4(0.45)^4(0.55)^0 = 0.0410$

(b)

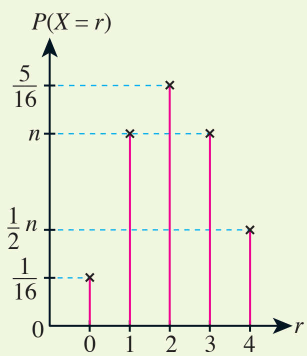


(c) (i) $P(X > 3) = P(X = 4)$
$= 0.0410$

(ii) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
$= 0.0915 + 0.2995$
$= 0.3910$

Contoh 10

Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi suatu taburan binomial.
(a) Nyatakan semua kesudahan yang mungkin bagi X.
(b) Cari nilai n.



Penyelesaian

(a) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
(b) $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{2}n + n + \frac{5}{16} + n = 1$$

$$n = \frac{1}{4}$$

Latihan Kendiri 5.7

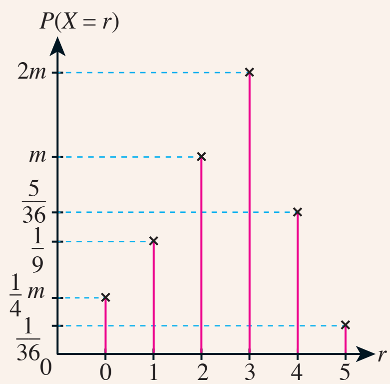
1. Didapati bahawa 35% daripada murid Tingkatan 5 Bestari mendapat gred B dalam mata pelajaran Matematik Tambahan. Jika 6 orang murid dipilih secara rawak dari kelas itu, cari kebarangkalian bahawa
   (a) 4 orang murid mendapat gred B,
   (b) lebih daripada seorang murid mendapat gred B.

2. Dalam satu kajian, kebarangkalian bahawa sejenis telefon pintar akan rosak selepas 3 tahun digunakan ialah 78%.
   (a) Jika 7 buah telefon pintar ini dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa 4 buah telefon pintar akan rosak selepas 3 tahun digunakan.
   (b) Cari bilangan telefon pintar yang akan rosak jika sampel itu ialah 200.

3. Dalam suatu laporan, 54% daripada rakyat Malaysia membeli kereta baharu buatan tempatan. Jika 8 orang yang membeli kereta baharu dipilih secara rawak, cari kebarangkalian
   (a) sekurang-kurangnya 2 orang membeli kereta baharu buatan tempatan,
   (b) lebih daripada 6 orang membeli kereta baharu buatan tempatan.

4. Didapati bahawa kebarangkalian sebuah kilang elektronik menghasilkan mesin cetak yang kurang memuaskan ialah 0.05. Lima buah mesin cetak dipilih secara rawak dari kilang itu.
   (a) Bina jadual taburan kebarangkalian bagi bilangan mesin cetak yang kurang memuaskan dan seterusnya lukiskan graf.
   (b) Daripada jadual atau graf, cari kebarangkalian bahawa
      (i) tepat 2 buah mesin cetak kurang memuaskan,
      (ii) lebih daripada sebuah mesin cetak kurang memuaskan.

5. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi suatu taburan binomial dengan pemboleh ubah rawak diskret X.
   (a) Nyatakan semua kesudahan yang mungkin bagi X.
   (b) Cari nilai m bagi graf itu.
   (c) Cari peratus bagi $P(X \geqslant 2)$.



6. Dalam satu kajian, didapati bahawa 17% daripada rakyat Malaysia yang berumur 18 tahun dan ke atas menghidap penyakit diabetes. Jika 10 orang dipilih secara rawak daripada kumpulan umur itu, cari
   (a) kebarangkalian bahawa 5 orang menghidap penyakit diabetes,
   (b) $P(2 \leqslant X \leqslant 6)$ dengan keadaan X mewakili bilangan rakyat Malaysia berumur 18 tahun dan ke atas yang menghidap penyakit diabetes.

Nilai min, varians dan sisihan piawai bagi suatu taburan binomial

Anda telah mempelajari bahawa taburan binomial terdiri daripada n percubaan Bernoulli yang tidak bersandar dan setiap percubaan itu mempunyai kebarangkalian 'kejayaan' yang sama. Apakah yang dimaksudkan dengan min atau nilai jangkaan bagi taburan binomial ini? Mari teroka dengan lebih lanjut tentangnya.

Aktiviti Penerokaan 5 Berpasangan PAK-21

Tujuan: Menentukan nilai min bagi suatu taburan binomial

Langkah:

1. Teliti dua situasi di bawah.

Situasi 1
Sekeping duit syiling adil dilambungkan sebanyak 100 kali. Katakan X mewakili bilangan kali mendapat gambar.

Situasi 2
Satu ujian objektif mempunyai 60 soalan dengan setiap soalan terdiri daripada empat pilihan jawapan. Seorang murid menjawab semua soalan itu secara rawak. Katakan X mewakili bilangan soalan yang dijawab dengan betul.

2. Daripada Situasi 1, anggarkan bilangan kali mendapat gambar berdasarkan konsep nisbah. Jelaskan.
3. Daripada Situasi 2, anggarkan bilangan soalan yang dijawab dengan betul berdasarkan konsep nisbah. Jelaskan.
4. Bincangkan jawapan yang diperoleh dengan pasangan lain.

Daripada Aktiviti Penerokaan 5, didapati bahawa nilai jangkaan bagi suatu taburan binomial ialah hasil darab bilangan percubaan Bernoulli dengan kebarangkalian peristiwa 'kejayaan' berlaku.

Jika suatu pemboleh ubah rawak diskret X bertaburan binomial, iaitu $X \sim B(n, p)$, maka **nilai jangkaan** atau **min**, μ bagi taburan ini ditakrifkan sebagai jumlah hasil darab X dengan kebarangkaliannya dan dibahagi oleh jumlah kebarangkalian.

$$\mu = \frac{\sum_{r=0}^{n} r\,P(X = r)}{\sum_{r=0}^{n} P(X = r)}$$

Oleh kerana $\sum_{r=0}^{n} P(X = r) = 1$, maka rumus bagi min boleh diringkaskan seperti berikut.

$$\text{Min, } \mu = np$$

Sisihan piawai, σ ialah ukuran saiz sebaran suatu set data daripada nilai jangkaannya.

Varians, σ^2 dan sisihan piawai, σ bagi taburan binomial diberi oleh rumus berikut.

$$\text{Varians, } \sigma^2 = npq$$

$$\text{Sisihan piawai, } \sigma = \sqrt{npq}$$

Akses QR

Pembuktian rumus min dan varians taburan binomial.

bit.ly/2Sgrlk7

Contoh 11

Suatu kajian mendapati bahawa 95% daripada rakyat Malaysia yang berumur 20 tahun dan ke atas mempunyai lesen memandu kereta. Jika 160 orang dipilih secara rawak daripada kumpulan umur itu, jangkakan bilangan rakyat Malaysia berumur 20 tahun dan ke atas yang mempunyai lesen memandu kereta. Seterusnya, cari varians dan sisihan piawai bagi taburan ini.

Penyelesaian

Diberi $p = 0.95$, $q = 0.05$ dan $n = 160$.

Min, $\mu = np$
$\mu = 160 \times 0.95$
$\mu = 152$

Varians, $\sigma^2 = npq$
$\sigma^2 = 160 \times 0.95 \times 0.05$
$\sigma^2 = 7.60$

Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{npq}$
$\sigma = \sqrt{7.6}$
$\sigma = 2.76$

Kuiz Pantas

Mengapakah sisihan piawai ialah punca kuasa dua varians? Jelaskan.

Latihan Kendiri 5.8

1. Suatu pemboleh ubah rawak diskret X bertaburan binomial, iaitu $X \sim B(n, p)$ dengan min 45 dan sisihan piawai 3. Cari nilai n dan p.
2. Suatu pemboleh ubah rawak diskret $X \sim B(120, 0.4)$. Cari min dan sisihan piawainya.
3. Terdapat 5 000 orang penduduk di sebuah kampung. Didapati bahawa 8 daripada 10 orang penduduk kampung itu memiliki jalur lebar di rumahnya. Cari min, varians dan sisihan piawai bagi bilangan penduduk yang memiliki jalur lebar di rumahnya.
4. Dalam suatu kajian, didapati bahawa 3 daripada 5 orang lelaki dewasa gemar menonton perlawanan bola sepak. Jika 1 000 orang lelaki dewasa dipilih secara rawak, cari min dan sisihan piawai bagi bilangan lelaki dewasa yang gemar menonton perlawanan bola sepak.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan taburan binomial

Contoh 12

Sebuah kedai kek menghasilkan sejenis kek coklat. Didapati bahawa 12% daripada kek coklat itu berjisim kurang daripada 1 kg. Cari bilangan minimum kek coklat yang perlu dipantau supaya kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya sebiji kek coklat berjisim kurang daripada 1 kg yang dipilih secara rawak adalah lebih besar daripada 0.85.

Penyelesaian

Katakan X mewakili bilangan kek coklat yang berjisim kurang daripada 1 kg.
Maka, $X \sim \text{B}(n, p)$ dengan $p = 0.12$ dan $q = 0.88$.

$$P(X \geqslant 1) > 0.85$$
$$1 - P(X = 0) > 0.85$$
$$P(X = 0) < 1 - 0.85$$
$${}^nC_0(0.12)^0(0.88)^n < 0.15$$
$$(0.88)^n < 0.15$$
$$n \log 0.88 < \log 0.15$$

Ambil log bagi kedua-dua belah persamaan

$$n > \frac{\log 0.15}{\log 0.88}$$
$$n > 14.84$$

Maka, bilangan minimum kek coklat yang perlu dipantau ialah $n = 15$.

Kuiz Pantas

Dalam Contoh 12, nyatakan alasan anda mengapa $n > \dfrac{\log 0.15}{\log 0.88}$ bukan $n < \dfrac{\log 0.15}{\log 0.88}$

Contoh 13 APLIKASI MATEMATIK

Dalam satu kajian, didapati bahawa 35% daripada rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun 1980 hingga tahun 2000 berkemampuan membeli sebuah rumah sendiri. Jika 10 orang daripada rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun itu dipilih secara rawak, cari kebarangkalian bahawa tidak lebih daripada dua orang yang berkemampuan membeli rumah sendiri.

Penyelesaian

1 . Memahami masalah

- Masalah ini menunjukkan ciri-ciri taburan binomial dengan $n = 10$ dan $p = 0.35$.
- Cari P(tidak lebih daripada dua orang yang berkemampuan membeli rumah sendiri).

2 . Merancang strategi

- Katakan X mewakili bilangan rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun 1980 hingga tahun 2000 berkemampuan membeli rumah sendiri.
- $P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$ dengan menggunakan rumus $P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$ yang $r = 0$, 1 dan 2.

BAB 5

3 . Melaksanakan strategi

Didapati bahawa, $q = 1 - p$
$q = 1 - 0.35$
$q = 0.65$

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= {}^{10}C_0(0.35)^0(0.65)^{10} + {}^{10}C_1(0.35)^1(0.65)^9 + {}^{10}C_2(0.35)^2(0.65)^8$$
$$= 0.0135 + 0.0725 + 0.1757$$
$$= 0.2617$$

4 . Membuat refleksi

Katakan Y mewakili bilangan rakyat Malaysia yang lahir dalam julat tahun 1980 hingga tahun 2000 tidak berkemampuan membeli rumah sendiri.
Maka, $n = 10$, $p = 0.65$ dan $q = 0.35$.

$$P(Y \geqslant 8) = P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10)$$
$$= {}^{10}C_8(0.65)^8(0.35)^2 + {}^{10}C_9(0.65)^9(0.35)^1 + {}^{10}C_{10}(0.65)^{10}(0.35)^0$$
$$= 0.1757 + 0.0725 + 0.0135$$
$$= 0.2617$$

Latihan Kendiri 5.9

1. 7 orang pelajar di sebuah universiti tempatan memohon biasiswa yayasan negeri masing-masing. Kebarangkalian bahawa setiap pelajar akan berjaya mendapat biasiswa ialah $\frac{1}{3}$. Cari kebarangkalian bahawa
(a) semua pelajar berjaya mendapat biasiswa,
(b) hanya dua orang pelajar berjaya mendapat biasiswa,
(c) selebih-lebihnya dua orang pelajar mendapat biasiswa.

2. Dalam suatu permainan, peserta perlu meneka bilangan guli dalam sebuah botol. Kebarangkalian memperoleh tekaan yang tepat ialah p.
(a) Cari nilai p dan bilangan kali tekaan supaya min dan varians masing-masing ialah 36 dan 14.4.
(b) Jika peserta membuat lapan kali tekaan, cari kebarangkalian bahawa empat kali tekaan adalah tepat.

3. 80% daripada murid sebuah sekolah meminati mata pelajaran Sains. Suatu sampel yang terdiri daripada n orang murid dipilih secara rawak dari sekolah itu.
(a) Jika kebarangkalian bahawa semua murid minat mata pelajaran Sains ialah 0.1342, cari nilai n.
(b) Berdasarkan jawapan di (a), cari kebarangkalian bahawa kurang daripada tiga orang murid minat mata pelajaran Sains.

Latihan Formatif 5.2

Kuiz bit.ly/2sQUHeg

1. Sekeping duit syiling adil dilambungkan sebanyak empat kali. Bina jadual taburan kebarangkalian untuk mendapat angka.

2. Sebiji dadu adil dilambungkan sebanyak 3 kali. Bina jadual dan lukis graf taburan kebarangkalian untuk mendapat nombor lebih daripada 3.

3. Kebarangkalian seorang murid Tingkatan 5 melanjutkan pelajaran selepas tamat persekolahan ialah 0.85. Dalam suatu sampel yang terdiri daripada lapan orang murid Tingkatan 5, cari kebarangkalian bahawa
   (a) semua murid melanjutkan pelajaran selepas tamat persekolahan,
   (b) kurang daripada tiga orang murid melanjutkan pelajaran selepas tamat persekolahan.

4. Sebiji durian dipilih secara rawak dari beberapa buah bakul. Kebarangkalian bahawa sebiji durian yang dipilih adalah busuk ialah 0.1. Cari nilai jangkaan dan sisihan piawai bilangan durian yang busuk dalam satu sampel bagi 50 biji durian.

5. Pemboleh ubah rawak binomial $X \sim B(n, p)$ mempunyai min 5 dan varians 4.
   (a) Cari nilai n dan p.
   (b) Seterusnya, cari $P(X = 3)$.

6. X ialah suatu pemboleh ubah rawak diskret supaya $X \sim B(10, p)$ dengan $p < 0.5$ dan varians $= \frac{12}{5}$. Cari
   (a) nilai p dan min bagi X,
   (b) $P(X = 4)$.

7. 20 keping duit syiling adil dilambungkan secara serentak. X ialah pemboleh ubah rawak diskret yang mewakili bilangan angka diperoleh. Hitung min dan varians bagi X.

8. Dalam satu kajian, didapati bahawa 1 daripada 5 buah kalkulator jenama A boleh bertahan lebih daripada 8 tahun. Satu sampel yang terdiri daripada n buah kalkulator dipilih secara rawak daripada jenama itu. Jika kebarangkalian semua kalkulator boleh bertahan lebih daripada 8 tahun ialah 0.0016, cari
   (a) nilai n,
   (b) kebarangkalian bahawa lebih daripada sebuah kalkulator boleh bertahan lebih daripada 8 tahun.

9. Dalam suatu ujian objektif yang terdiri daripada 16 soalan, setiap soalan mempunyai empat pilihan jawapan dengan satu daripadanya adalah betul. Seorang murid meneka jawapan bagi setiap soalan itu.
   (a) Jangkakan bilangan soalan yang diteka dengan salah.
   (b) Cari kebarangkalian bahawa murid itu
      (i) mendapat semua jawapan salah,
      (ii) lulus dalam ujian jika 60% dianggap sebagai lulus.

5.3 Taburan Normal

Ciri-ciri graf taburan normal

Daripada taburan binomial yang telah anda pelajari, didapati bahawa bilangan sampel yang dipilih lazimnya tidak besar. Pertimbangkan situasi yang berikut:

> Jika suatu sampel n menjadi besar, misalnya $n > 30$ dan $p = 0.5$, apakah yang akan berlaku pada pengiraan menggunakan taburan binomial?

Jika suatu sampel n menjadi besar, pengiraan akan menjadi rumit dan nilai tidak boleh diperoleh daripada jadual binomial. Maka, apabila suatu sampel n menjadi besar, kita boleh menganggarkan jawapan menggunakan taburan normal.

Kuiz Pantas

Berikan empat contoh fenomena semula jadi yang boleh diwakilkan oleh taburan normal.

Berikut merupakan syarat yang boleh digunakan untuk menentukan sama ada n adalah cukup besar atau tidak.

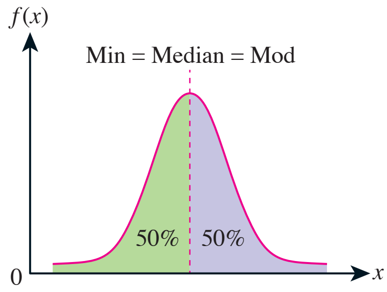
- $np \geqslant 10$, dengan keadaan p ialah kebarangkalian 'kejayaan'.
- $n(1 - p) \geqslant 10$, dengan keadaan $(1 - p)$ ialah kebarangkalian 'kegagalan'.

Secara amnya,

> **Taburan normal** ialah satu fungsi kebarangkalian bagi suatu pemboleh ubah rawak selanjar. Taburan adalah bersimetri dengan kebanyakan data terkumpul di bahagian tengah, iaitu berhampiran dengan min. Kebarangkalian bagi data pula semakin berkurang apabila menjauhi min pada kedua-dua arah.

Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi fungsi taburan normal. Berdasarkan rajah, didapati bahawa:

- Min = Median = Mod
- Graf bersimetri pada pusat taburan normal.
- 50% daripada nilai data kurang daripada min dan 50% daripada nilai data lebih daripada min.

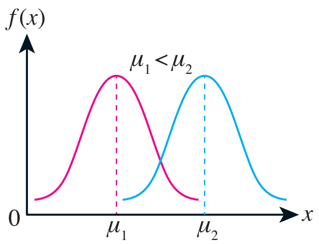
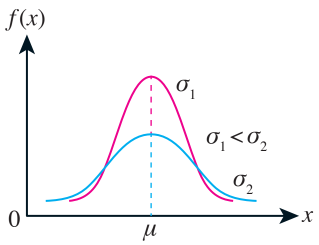


Ciri-ciri penting bagi graf fungsi taburan normal adalah seperti yang berikut:

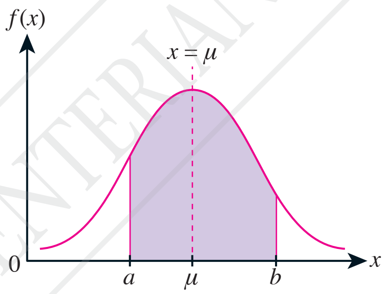
> - Lengkung berbentuk loceng dan bersimetri pada garis tegak yang melalui min, μ.
> - Lengkung mempunyai nilai maksimum pada paksi simetri, $X = \mu$.
> - Min, μ membahagikan luas rantau di bawah graf kepada dua bahagian yang sama.
> - Kedua-dua hujung lengkung graf melanjut secara tidak terhingga tanpa menyentuh paksi-x.
> - Jumlah luas di bawah graf yang bersamaan dengan jumlah kebarangkalian bagi semua kesudahan ialah 1 unit^2.

Secara amnya, tatatanda taburan normal bagi pemboleh ubah X ditulis sebagai $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Walaupun graf fungsi taburan normal mempunyai bentuk yang serupa, namun kedudukan dan kelebaran graf bergantung kepada nilai min, μ dan sisihan piawai, σ. Jadual di bawah menunjukkan perubahan bentuk dan kedudukan graf taburan normal apabila nilai μ dan σ berubah.

	Perubahan bentuk dan kedudukan graf taburan normal
$\mu_1 < \mu_2$ 	• Bentuk graf tidak berubah. • Paksi simetri pada min, μ bergerak mengikut nilai μ jika sisihan piawai, σ adalah malar. • Semakin besar nilai min, semakin ke kanan kedudukan graf itu.
$\sigma_1 < \sigma_2$ 	• Sisihan piawai mempengaruhi ketinggian dan kelebaran graf tetapi kedudukan graf tidak berubah. • Semakin besar nilai sisihan piawai, σ, semakin besar serakan taburan normal daripada nilai min, μ. • Ketinggian graf bertambah apabila nilai sisihan piawai, σ berkurang jika min, μ adalah malar.

Perhatikan graf taburan normal di bawah.



Luas di bawah graf bagi nilai X dari a hingga b mewakili kebarangkalian X berlaku untuk nilai X dari a hingga b dan ditulis sebagai:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$$

Didapati bahawa kedua-dua kebarangkalian di atas adalah sama kerana fungsi taburan normal adalah selanjar.

Kuiz Pantas

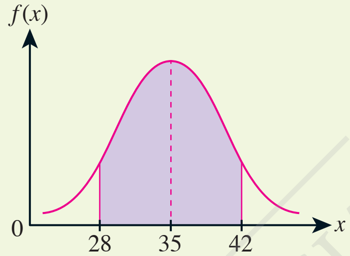
Apakah yang akan terjadi kepada taburan binomial apabila $n \to \infty$?
Imbas kod *QR* atau layari pautan di bawah untuk menerokanya.

ggbm.at/dkdscrnu

BAB 5

Contoh 14

Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi fungsi taburan normal yang bersimetri pada $X = 35$.
(a) Nyatakan nilai min, μ.
(b) Ungkapkan rantau berlorek dalam tatatanda kebarangkalian.
(c) Jika kebarangkalian rantau berlorek ialah 0.64, cari $P(X < 28)$.



Penyelesaian

(a) $\mu = 35$
(b) $P(28 < X < 42)$
(c) Oleh sebab graf bersimetri pada $X = 35$ serta $X = 28$ dan $X = 42$ masing-masing ialah 7 unit di sebelah kiri dan kanan min, maka

$$P(X < 28) = P(X > 42)$$
$$= \frac{1 - 0.64}{2}$$
$$= 0.18$$

Sudut Informasi

Luas di bawah graf mewakili kebarangkalian bagi taburan normal, iaitu:

$P(-\infty < X < \infty) = 1$

Contoh 15

Suatu pemboleh ubah rawak selanjar $X \sim N(2.3, 0.16)$. Nyatakan min, μ dan sisihan piawai, σ bagi taburan ini.

Penyelesaian

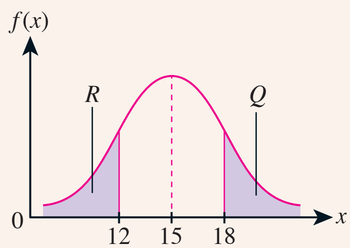
Diberi $X \sim N(2.3, 0.16)$
Maka,
Min, $\mu = 2.3$
Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{0.16}$
$\sigma = 0.4$

Tip Pintar

Tatatanda pemboleh ubah X bertaburan normal boleh ditulis sebagai $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Latihan Kendiri 5.10

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf taburan normal bagi pemboleh ubah rawak selanjar X.
   (a) Nyatakan min bagi X.
   (b) Ungkapkan rantau berlorek Q dan R dalam tatatanda kebarangkalian.
   (c) Jika $P(X < 18) = 0.7635$, cari $P(X > 18)$ dan $P(15 < X < 18)$.



2. Suatu pemboleh ubah rawak selanjar $X \sim N(\mu, 16)$ dan bersimetri pada $X = 12$.
   (a) Nyatakan nilai μ.
   (b) Lakar graf taburan normal itu dan lorekkan rantau yang mewakili $P(10 < X < 15)$.

Variasi rawak dan hukum bilangan besar

Apabila satu eksperimen yang sama diulang banyak kali, keputusan puratanya akan menumpu kepada keputusan yang dijangka. Dalam hal ini, **variasi rawak** menjadi semakin kecil dengan pertambahan bilangan kali eksperimen. Situasi ini dikenali sebagai **hukum bilangan besar**.

Pertimbangkan sekeping duit syiling yang dilambungkan sebanyak 10 kali. Kesudahan yang mungkin diperoleh ialah memperoleh 7 kali gambar walaupun jangkaan hanya memperoleh 5 kali gambar. Namun, jika duit syiling itu dilambungkan sebanyak 10 000 kali, kemungkinan besar bilangan kali gambar yang diperoleh akan menghampiri 5 000 kali, iaitu tidak mungkin memperoleh 7 000 kali.

GALERI SEJARAH

Abraham de Moivre merupakan seorang ahli matematik yang dapat menyelesaikan masalah apabila suatu sampel menjadi sangat besar. Beliau telah memperkenalkan taburan normal berdasarkan konsep hukum bilangan besar.

Secara amnya,

> Semakin besar saiz suatu sampel, semakin kecil variasi rawak. Jadi, nilai anggaran suatu parameter menjadi lebih konsisten.

Lakukan aktiviti penerokaan di bawah untuk meneroka hukum bilangan besar.

Aktiviti Penerokaan 6 Berkumpulan PAK-21

Tujuan: Meneroka hukum bilangan besar apabila saiz suatu sampel semakin besar

Langkah:

1. Sediakan sekeping duit syiling dan bina satu jadual untuk mengisi kesudahan bagi 30 lambungan seperti yang ditunjukkan dalam jadual di bawah.

Bilangan percubaan, n	Kesudahan, G atau A	Min percubaan kumulatif mendapat G, μ'
1	Contoh: G	Mendapat satu gambar daripada satu percubaan: $\frac{1}{1} = 1$
2	Contoh: A	Mendapat satu gambar daripada dua percubaan: $\frac{1}{2} = 0.5$
3	Contoh: G	Mendapat dua gambar daripada tiga percubaan: $\frac{2}{3} = 0.67$
⋮	⋮	⋮
30		

2. Lambungkan duit syiling satu kali. Kemudian, catatkan dalam jadual sama ada anda memperoleh kesudahan gambar (G) atau angka (A).
3. Hitung min memperoleh kesudahan gambar (G) dengan menggunakan rumus yang berikut.

$$\text{Min} = \frac{\text{Bilangan kesudahan kumulatif } G \text{ yang diperoleh dari } n = 1 \text{ hingga } n \text{ semasa}}{\text{Bilangan percubaan } n \text{ semasa}}$$

4. Dengan mengisi kesudahan yang diperoleh dalam lajur kedua jadual, lambungan ini diteruskan sehingga n = 30 dan hitung min memperoleh kesudahan gambar (G) selepas setiap lambungan dilakukan seperti contoh yang ditunjukkan dalam jadual.
5. Kemudian, jawab soalan-soalan yang berikut:
   (a) Apakah yang berlaku kepada nilai min percubaan apabila bilangan percubaan semakin bertambah?
   (b) Diketahui bahawa nilai min teori, μ ialah 0.5. Adakah nilai min percubaan menghampiri nilai min teori? Jelaskan.
   (c) Daripada jadual, lukis graf nilai min percubaan, μ' melawan bilangan percubaan, n. Pada graf yang sama, lukis garis lurus yang mewakili min teori, μ, iaitu 0.5.
   (d) Berdasarkan graf yang dibina, bandingkan nilai min percubaan, μ' yang anda peroleh selepas 30 lambungan dengan nilai min teori, μ.
6. Setiap wakil kumpulan bergerak ke kumpulan yang lain dan bentangkan hasil kumpulan masing-masing.

Hasil daripada Aktiviti Penerokaan 6, didapati bahawa semakin besar nilai n, semakin rendah variasi rawak terhadap nilai min. Hal ini bermaksud kecenderungan nilai min percubaan tersisih secara rawak daripada nilai min teori adalah berkurangan. Nilai min percubaan dikatakan semakin menghampiri nilai min teori.

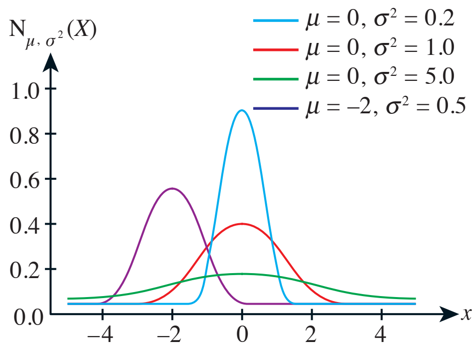
Secara amnya,

Hukum bilangan besar menyatakan bahawa semakin besar saiz suatu sampel, nilai min percubaan semakin menghampiri nilai min teori bagi suatu populasi.

Taburan normal piawai

Rajah di sebelah menunjukkan empat lengkung dengan taburan normal. Bolehkah semua taburan normal itu dipiawaikan supaya kita dapat membuat perbandingan antara satu sama lain?

Taburan normal piawai ditakrifkan sebagai satu taburan normal dengan min dan sisihan piawai masing-masing ialah 0 dan 1. Berdasarkan rajah di sebelah, lengkung berwarna merah ialah taburan normal piawai kerana min ialah 0 dan sisihan piawai ialah 1.



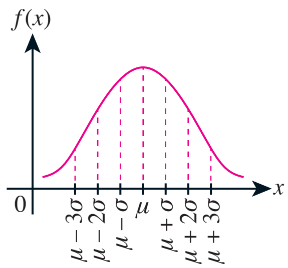
Taburan normal piawai menjadi satu lengkung piawai untuk tujuan perbandingan ke atas semua pemboleh ubah yang bertaburan secara normal dengan menukarkan semua skornya kepada skala yang sama. Semua taburan normal boleh ditukarkan kepada taburan normal piawai dengan min 0 dan sisihan piawai 1. Maka, suatu pemboleh ubah rawak selanjar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan min μ dan sisihan piawai σ boleh dipiawaikan kepada pemboleh ubah rawak selanjar Z dengan min 0 dan sisihan piawai 1 menggunakan rumus yang berikut:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \text{ dengan keadaan } Z \sim N(0, 1)$$

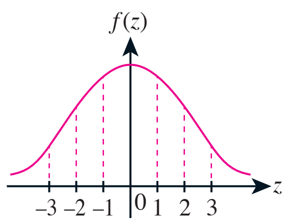
Pemboleh ubah rawak selanjar Z ialah pemboleh ubah rawak normal piawai atau skor-z dan taburannya dikenali sebagai taburan normal piawai.

Rajah di bawah menunjukkan perkaitan antara graf $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan graf $Z \sim N(0, 1)$.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



$Z \sim N(0, 1)$

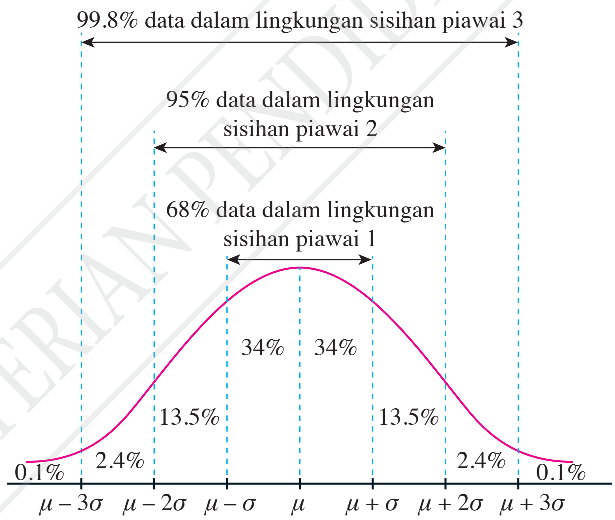


Tip Pintar

$$\text{Min, } E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}[E(X)-\mu] = \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu] = 0$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}[\text{Var}(X)-0] = \frac{1}{\sigma^2}[\sigma^2] = 1$$

Apabila suatu data bertaburan normal, sisihan piawai adalah sangat penting kerana sisihan piawai mengukur serakan data daripada min. Pada kebiasaannya, peratusan taburan data yang wujud dalam setiap lingkungan sisihan piawai tertentu boleh dilihat seperti yang ditunjukkan dalam rajah berikut.



Secara amnya, peratusan taburan data yang wujud dalam setiap lingkungan sisihan piawai adalah seperti berikut:

- 68% daripada data berada dalam lingkungan sisihan piawai ±1 daripada min.
- 95% daripada data berada dalam lingkungan sisihan piawai ±2 daripada min.
- 99.8% daripada data berada dalam lingkungan sisihan piawai ±3 daripada min.

Menentukan dan mentafsir skor piawai, Z

Sebarang pemboleh ubah rawak selanjar X bagi suatu taburan normal dengan min μ dan sisihan piawai σ boleh dipiawaikan kepada pemboleh ubah rawak selanjar Z dengan rumus $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Contoh 16

(a) Suatu pemboleh ubah rawak selanjar X bertaburan normal dengan min 30 dan sisihan piawai 8. Cari skor-z jika $X = 42$.

(b) Tinggi bangunan di Kampung Pekan bertaburan secara normal dengan min 23 m dan varians 25 m², cari tinggi bangunan jika skor piawai ialah 0.213.

Penyelesaian

(a) Diberi $X = 42$, $\mu = 30$ dan $\sigma = 8$.

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$Z = \frac{42 - 30}{8}$

$Z = 1.5$

(b) Diberi $\mu = 23$, $\sigma^2 = 25$ dan skor-$z = 0.213$.

Jadi, $\sigma = \sqrt{25}$

$\sigma = 5$

Oleh itu,

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$0.213 = \frac{X - 23}{5}$

$1.065 = X - 23$

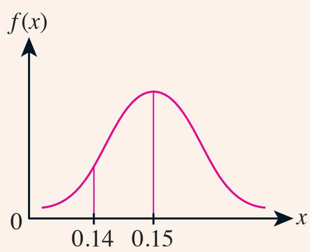
$X = 24.065$ m

Latihan Kendiri 5.11

1. Suatu pemboleh ubah rawak selanjar X bertaburan normal dengan min, $\mu = 24$ dan sisihan piawai, $\sigma = 6$, cari skor-z jika $X = 19.5$.

2. X ialah suatu pemboleh ubah rawak selanjar yang bertaburan secara normal, iaitu $X \sim N(500, 169)$. Cari nilai X jika skor-z ialah 1.35.

3. Rajah di sebelah menunjukkan graf taburan normal bagi jisim telefon pintar yang dihasilkan oleh sebuah kilang elektronik. Jika sisihan piawai ialah 0.05 kg, cari
   (a) skor-z apabila sebuah telefon pintar yang dipilih secara rawak mempunyai jisim 0.14 kg,
   (b) jisim sebuah telefon pintar yang dipilih secara rawak jika skor-z ialah -0.12.



4. Suatu pemboleh ubah rawak selanjar X bertaburan normal dan bersimetri pada $X = 45$. Jika X dipiawaikan kepada taburan normal piawai, didapati bahawa $X = 60$ akan dipiawaikan kepada $Z = 1.5$. Nyatakan min dan sisihan piawai bagi taburan normal ini.

Menentukan kebarangkalian suatu peristiwa bagi taburan normal

Jika suatu peristiwa bertaburan secara normal, kebarangkalian peristiwa itu berlaku hanya boleh diukur jika taburan normal itu dipiawaikan kepada taburan normal piawai.

Misalnya, untuk mencari kebarangkalian pemboleh ubah rawak selanjar X yang berlaku antara a dengan b, kita boleh menulisnya sebagai $P(a < X < b)$. Oleh itu, cara menukarkan kebarangkalian peristiwa itu kepada taburan normal piawai dengan pemboleh ubah rawak selanjar Z adalah seperti berikut:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Rajah di bawah menunjukkan hubungan antara graf taburan normal dengan graf taburan normal piawai.

Contoh 17

Taburan ukuran panjang sejenis skru yang dihasilkan oleh sebuah kilang boleh dianggap sebagai normal dengan min 10.6 cm dan sisihan piawai 3.2 cm. Wakilkan kebarangkalian bahawa sebatang skru yang dipilih secara rawak dari kilang itu mempunyai panjang antara 8.4 cm dengan 13.2 cm dengan keadaan Z ialah pemboleh ubah rawak selanjar piawai.

Penyelesaian

Katakan X mewakili panjang skru yang dihasilkan oleh kilang itu.

Diberi $\mu = 10.6$ dan $\sigma = 3.2$

$$\begin{aligned} P(\text{Panjang skru antara 8.4 cm dengan 13.2 cm}) &= P(8.4 < X < 13.2) \\ &= P\left(\frac{8.4 - 10.6}{3.2} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{13.2 - 10.6}{3.2}\right) \\ &= P(-0.6875 < Z < 0.8125) \end{aligned}$$

Kebarangkalian bagi skor-z untuk taburan normal piawai, iaitu $P(Z > z)$ boleh ditentukan dengan menggunakan sifir taburan normal piawai. Sifir ini dibina berdasarkan konsep bahawa kebarangkalian suatu taburan normal diberi oleh luas di bawah graf dengan jumlah luas di bawah graf ialah 1 unit^2.

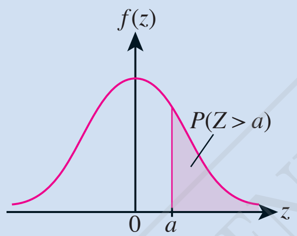
Oleh kerana graf ini adalah bersimetri, maka $P(Z \geqslant 0) = 0.5$ dan jadual sifir ini hanya memberikan luas di bawah graf ke kanan, iaitu bermula dari 0.5 untuk $P(Z > 0)$.

Rajah di bawah menunjukkan sebahagian daripada sifir taburan normal piawai.

Nilai z

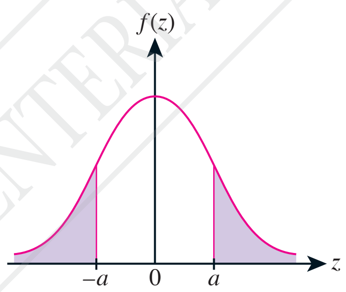
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
															Tolak				
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	4	8	12	15	19	23	27	31	35
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	4	7	11	15	19	22	26	30	34
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	4	7	11	15	18	22	25	29	32
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	3	7	10	14	17	20	24	27	31

Nilai yang menunjukkan kebarangkalian taburan normal piawai, iaitu $P(Z > a)$.



Setiap nombor ini ialah nilai dalam tiga atau empat tempat perpuluhan. Contohnya, 4 bermaksud 0.0004 dan 19 bermaksud 0.0019.

Perhatikan bahawa untuk setiap nilai $Z = a$, didapati bahawa $P(Z > a) = P(Z < -a)$ kerana graf bagi taburan normal piawai adalah bersimetri pada $Z = 0$. Teliti rajah di bawah.



Kuiz Pantas

Jika $a = 0$, apakah nilai bagi $P(Z > 0)$ atau $P(Z < 0)$?

Contoh 18

Diberi Z ialah pemboleh ubah rawak selanjar yang bertaburan secara normal piawai, cari

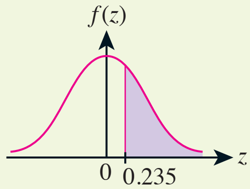
(a) $P(Z > 0.235)$ (b) $P(Z < -2.122)$ (c) $P(Z \geqslant -1.239)$

(d) $P(Z \leqslant 2.453)$ (e) $P(0 < Z < 1.236)$ (f) $P(-0.461 < Z < 1.868)$

(g) $P(|Z| > 2.063)$ (h) $P(|Z| \leqslant 1.763)$

Penyelesaian

(a) $P(Z > 0.235)$



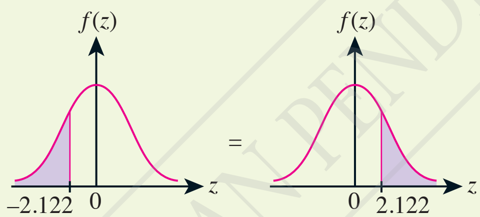
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5 (Tolak)	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	$\boxed{0.4090}$	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	4	8	12	15	$\boxed{19}$	23	27	31	35

$P(Z > 0.23) = 0.4090$

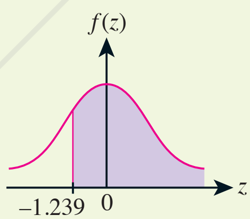
$P(Z > 0.235) = 0.4090 - 0.0019$
$= 0.4071$

Maka, $P(Z > 0.235) = 0.4071$

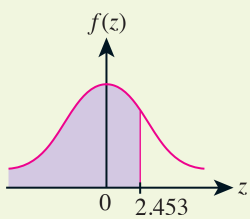
(b) $P(Z < -2.122)$
$= P(Z > 2.122)$
$= 0.0170 - 0.0001$
$= 0.0169$



(c) $P(Z \geqslant -1.239)$
$= 1 - P(Z < -1.239)$
$= 1 - P(Z > 1.239)$
$= 1 - (0.1093 - 0.0017)$
$= 0.8924$



(d) $P(Z \leqslant 2.453)$
$= 1 - P(Z > 2.453)$
$= 1 - (0.00714 - 0.0006)$
$= 0.9935$



Kuiz Pantas

Untuk mencari $P(Z > 0.235)$, mengapakah kita perlu menolak 0.0019 daripada 0.4090, iaitu $P(Z > 0.23)$?

Tip Pintar

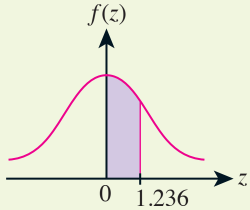
Graf normal piawai boleh dilukis terlebih dahulu sebelum menentukan nilai kebarangkalian daripada sifir taburan normal piawai.

Tip Pintar

Sifir taburan normal piawai hanya memberi nilai bagi luas di hujung kanan graf sahaja.

BAB 5

(e) $P(0 < Z < 1.236)$
$= P(Z > 0) - P(Z > 1.236)$
$= 0.5 - (0.1093 - 0.0011)$
$= 0.3918$



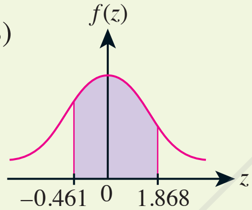
Bijak Kalkulator

Menentukan penyelesaian Contoh 18(e) dengan menggunakan kalkulator saintifik.

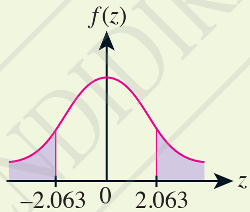
1. Tekan MENU 7 2 untuk taburan kumulatif normal.
2. Tekan 0 untuk *Lower* dan tekan =
3. Tekan 1 . 2 3 6 untuk *Upper* dan tekan =
4. Tekan = sekali lagi.
5. Skrin akan memaparkan

P =
0.3917707182

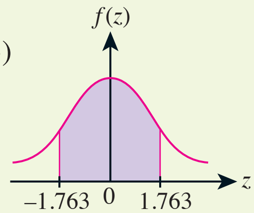
(f) $P(-0.461 < Z < 1.868)$
$= 1 - P(Z < -0.461) - P(Z > 1.868)$
$= 1 - P(Z > 0.461) - P(Z > 1.868)$
$= 1 - 0.3224 - 0.0308$
$= 0.6468$



(g) $P(|Z| > 2.063)$
$= P(Z < -2.063) + P(Z > 2.063)$
$= 2P(Z > 2.063)$
$= 2(0.0196)$
$= 0.0392$



(h) $P(|Z| \leqslant 1.763)$
$= P(-1.763 \leqslant Z \leqslant 1.763)$
$= 1 - P(Z < -1.763) - P(Z > 1.763)$
$= 1 - 2P(Z > 1.763)$
$= 1 - 2(0.0389)$
$= 0.9222$

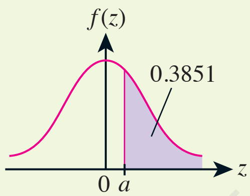


Contoh 19

Cari skor-z bagi setiap kebarangkalian taburan normal piawai yang berikut.

(a) $P(Z > a) = 0.3851$
(b) $P(Z < a) = 0.3851$
(c) $P(Z > a) = 0.7851$
(d) $P(-0.1 < Z \leqslant a) = 0.3851$
(e) $P(a < Z \leqslant 2.1) = 0.8633$
(f) $P(|Z| \leqslant a) = 0.4742$

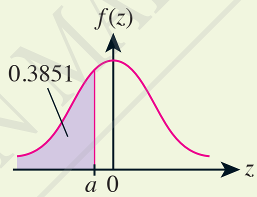
Penyelesaian



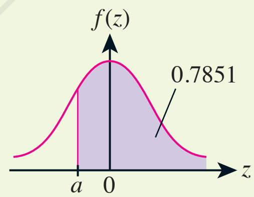
(a) $P(Z > a) = 0.3851$
$= 0.3859 - 0.0008$
Daripada sifir taburan normal piawai, didapati bahawa
$0.3851 = 0.3859 - 0.0008$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
															Tolak				
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	4	8	12	16	20	24	28	32	36
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	4	8	12	15	19	23	27	31	35

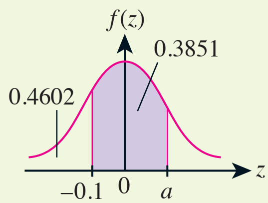
Maka, $a = 0.2 + 0.09 + 0.002$
$a = 0.292$



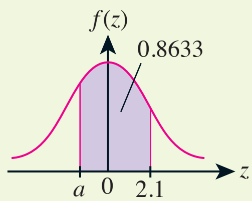
(b) $P(Z < a) = 0.3851$
Berdasarkan rajah di sebelah, a didapati negatif.
$P(Z > a) = 0.3851$
$a = -0.292$



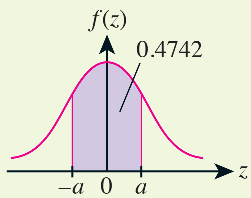
(c) $P(Z > a) = 0.7851$
Berdasarkan rajah di sebelah, a didapati negatif kerana luas adalah lebih daripada 0.5 unit^2.
$1 - P(Z < a) = 0.7851$
$P(Z < a) = 1 - 0.7851$
$= 0.2149$
$a = -0.789$



(d) $P(-0.1 < Z \leqslant a) = 0.3851$
$1 - P(Z < -0.1) - P(Z > a) = 0.3851$
$1 - 0.4602 - P(Z > a) = 0.3851$
$P(Z > a) = 0.1547$
$a = 1.017$



(e) $P(a < Z \leqslant 2.1) = 0.8633$
Berdasarkan rajah di sebelah, a didapati negatif kerana luas adalah lebih daripada 0.5 unit^2.
$1 - P(Z < a) - P(Z > 2.1) = 0.8633$
$1 - P(Z < a) - 0.0179 = 0.8633$
$P(Z < a) = 0.1188$
$a = -1.181$



(f) $P(|Z| \leqslant a) = 0.4742$
Oleh kerana graf adalah bersimetri, maka
$P(Z > a) = 0.5 - \frac{1}{2}(0.4742)$
$= 0.2629$
$a = 0.634$

Contoh 20

Jika $X \sim N(45, \sigma^2)$ dan $P(X > 51) = 0.2888$, cari nilai σ.

Penyelesaian

Diberi $\mu = 45$.

$$P(X > 51) = 0.2888$$

Piawaikan X kepada Z,

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{51-45}{\sigma}\right) = 0.2888$$

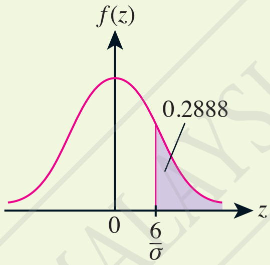
$$P\left(Z > \frac{6}{\sigma}\right) = 0.2888$$

$$\frac{6}{\sigma} = 0.557$$

0.557 ialah nilai z dalam sifir taburan normal piawai

$$\sigma = \frac{6}{0.557}$$

$$\sigma = 10.77$$



Contoh 21

Suatu pemboleh ubah rawak selanjar X bertaburan normal dengan min μ dan varians 12. Diberi bahawa $P(X > 32) = 0.8438$, cari nilai μ.

Penyelesaian

Diberi $\sigma^2 = 12$.

$$P(X > 32) = 0.8438$$

Piawaikan X kepada Z,

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{32-\mu}{\sqrt{12}}\right) = 0.8438$$

$$P\left(Z > \frac{32-\mu}{\sqrt{12}}\right) = 0.8438$$

$$1 - P\left(Z < -\frac{32-\mu}{\sqrt{12}}\right) = 0.8438$$

$$P\left(Z < -\frac{32-\mu}{\sqrt{12}}\right) = 1 - 0.8438$$

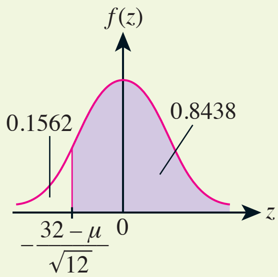
$$P\left(Z < -\frac{32-\mu}{\sqrt{12}}\right) = 0.1562$$

$$-\frac{32-\mu}{\sqrt{12}} = 1.01$$

1.01 ialah nilai z dalam sifir taburan normal piawai

$$\mu = 32 + 1.01\left(\sqrt{12}\right)$$

$$\mu = 35.50$$

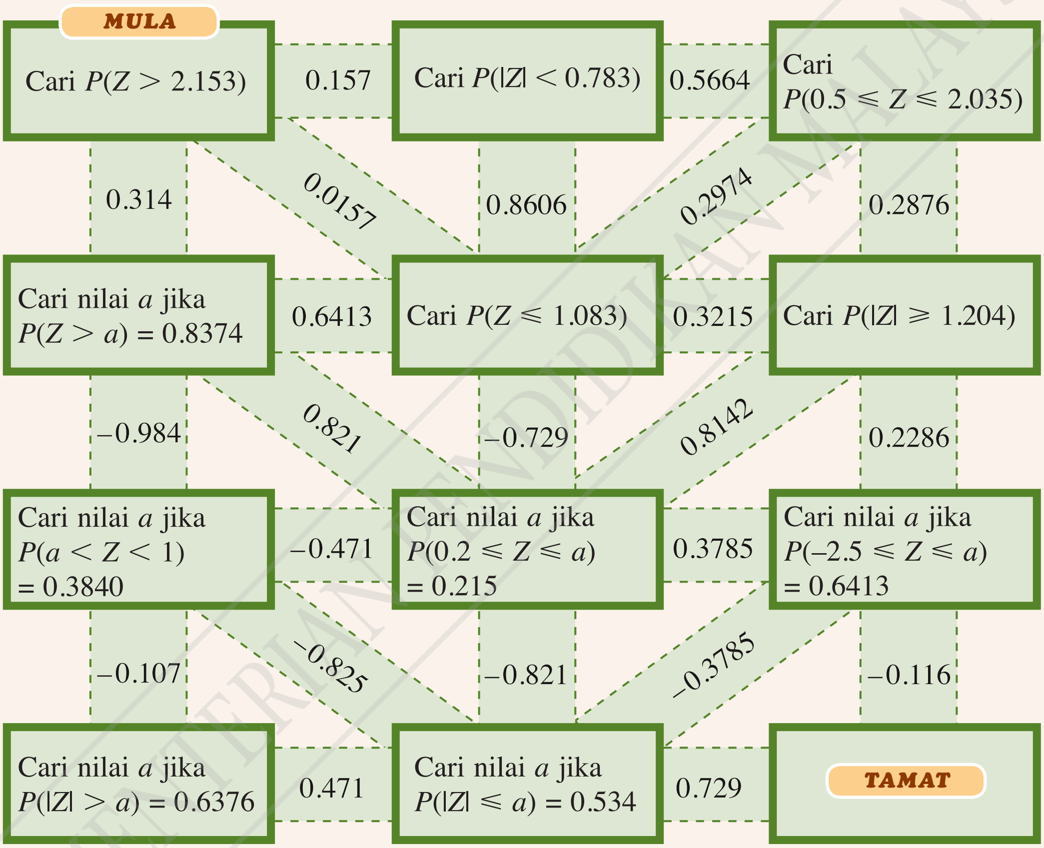


Latihan Kendiri 5.12

1. Jisim sejenis roti yang dihasilkan oleh syarikat M bertaburan normal dengan min 350 g dan sisihan piawai 45 g. Wakilkan kebarangkalian bahawa sebuku roti yang dipilih secara rawak dari syarikat itu mempunyai jisim antara 280 g dengan 375 g dengan keadaan Z ialah pemboleh ubah rawak selanjar piawai.

2. Diberi Z ialah suatu pemboleh ubah rawak selanjar bagi taburan normal piawai, cari
   (a) $P(Z \leqslant 0.538)$ (b) $P(-2.1 < Z < 1.2)$
   (c) $P(-1.52 < Z < -0.253)$ (d) $P(0 \leqslant Z \leqslant 1.984)$

3. Cari jalan hingga ke petak TAMAT dengan memilih jawapan yang betul.



4. Z ialah suatu pemboleh ubah rawak selanjar bagi taburan normal piawai. Cari nilai k apabila
   (a) $P(Z < k) = 0.6078$ (b) $P(Z \geqslant k) = 0.4538$

5. Jika pemboleh ubah rawak selanjar X mempunyai taburan normal dengan min 15 dan varians σ^2 dengan $P(X < 16.2) = 0.7654$, cari nilai σ.

6. Pemboleh ubah rawak selanjar X bertaburan secara normal dengan min 0.75 dan sisihan piawai σ. Diberi $P(X > 0.69) = 0.5178$, cari nilai σ.

7. Jika $Y \sim N(\mu, 16)$ dan $P(Y > 14.5) = 0.7321$, cari nilai μ.

8. Diberi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dengan $P(X > 80) = 0.0113$ dan $P(X < 30) = 0.0287$. Cari nilai μ dan σ.

Menyelesaikan masalah yang melibatkan taburan normal

Contoh 22

Ketebalan kertas yang dihasilkan oleh sebuah mesin bertaburan normal dengan min 1.05 mm dan sisihan piawai 0.02 mm. Tentukan kebarangkalian bahawa sekeping kertas yang dipilih secara rawak mempunyai ketebalan

(a) antara 1.02 mm dengan 1.09 mm,

(b) lebih daripada 1.08 mm atau kurang daripada 0.992 mm.

Penyelesaian

Diberi $\mu = 1.05$ mm dan $\sigma = 0.02$ mm bagi taburan normal.

Katakan X ialah pemboleh ubah rawak selanjar yang mewakili ketebalan kertas.

(a) $P(1.02 < X < 1.09)$

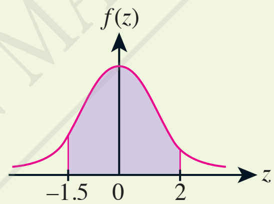
$$= P\left(\frac{1.02 - 1.05}{0.02} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1.09 - 1.05}{0.02}\right)$$

$= P(-1.5 < Z < 2)$

$= 1 - P(Z > 2) - P(Z > 1.5)$

$= 1 - 0.0228 - 0.0668$

$= 0.9104$



(b) $P(X > 1.08)$ atau $P(X < 0.992)$

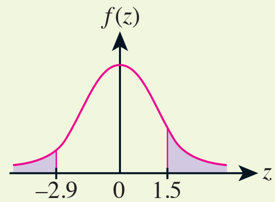
$$= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{1.08 - 1.05}{0.02}\right) + P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{0.992 - 1.05}{0.02}\right)$$

$= P(Z > 1.5) + P(Z < -2.9)$

$= P(Z > 1.5) + P(Z > 2.9)$

$= 0.0668 + 0.00187$

$= 0.0687$



Contoh 23

APLIKASI MATEMATIK

Jisim ayam yang diternak oleh Encik Rahmat bertaburan normal dengan min 1.2 kg dan sisihan piawai 0.3 kg.

(a) Jika Encik Rahmat menternak 1 500 ekor ayam, cari bilangan ayam yang berjisim antara 0.95 kg dengan 1.18 kg.

(b) Diberi bahawa 10% daripada ayam itu mempunyai jisim kurang daripada m kg, cari nilai m.

Penyelesaian

1. Memahami masalah

Diberi $\mu = 1.2$ kg dan $\sigma = 0.3$ kg bagi taburan normal.

Katakan X mewakili jisim ayam yang diternak oleh Encik Rahmat.

(a) Jika bilangan ayam yang diternak ialah 1 500 ekor, cari bilangan ayam dengan $P(0.95 < X < 1.18)$.

(b) Cari nilai m bagi $P(X < m) = 0.1$.

2 . Merancang strategi

- Tukarkan nilai X kepada skor-z.
- Lakarkan graf taburan normal untuk menentukan rantau yang berkenaan.
- Gunakan sifir taburan normal piawai atau kalkulator untuk mencari kebarangkalian.

3 . Melaksanakan strategi

(a) $P(0.95 < X < 1.18)$

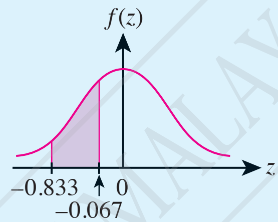
$= P\left(\dfrac{0.95 - 1.2}{0.3} < Z < \dfrac{1.18 - 1.2}{0.3}\right)$

$= P(-0.833 < Z < -0.067)$

$= P(Z > 0.067) - P(Z > 0.833)$

$= 0.4733 - 0.2025$

$= 0.2708$



Maka, bilangan ayam berjisim antara 0.95 kg dengan 1.18 kg

$= 0.2708 \times 1\ 500$

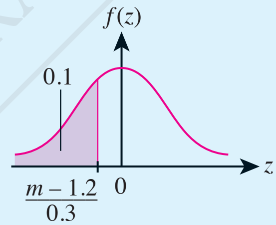
$= 406$ ekor

(b) $P(X < m) = 0.1$

$P\left(Z < \dfrac{m - 1.2}{0.3}\right) = 0.1$

$\dfrac{m - 1.2}{0.3} = -1.281$

$m = 0.8157$



4 . Membuat refleksi

(a) Jika bilangan ayam yang berjisim antara 0.95 kg dengan b kg ialah 406 ekor, maka

$P(0.95 < X < b) \times 1\ 500 = 406$

$P(0.95 < X < b) = 0.2707$

$P\left(\dfrac{0.95 - 1.2}{0.3} < Z < \dfrac{b - 1.2}{0.3}\right) = 0.2707$

$P\left(-0.833 < Z < \dfrac{b - 1.2}{0.3}\right) = 0.2707$

$P\left(Z > \dfrac{b - 1.2}{0.3}\right) - P(Z > 0.833) = 0.2707$

$P\left(Z > \dfrac{b - 1.2}{0.3}\right) - 0.2025 = 0.2707$

$P\left(Z > \dfrac{b - 1.2}{0.3}\right) = 0.4732$

$\dfrac{b - 1.2}{0.3} = -0.067$

$b = 1.18$ kg

(b) $P(X < 0.8157)$

$= P\left(Z < \dfrac{0.8157 - 1.2}{0.3}\right)$

$= P(Z < -1.281)$

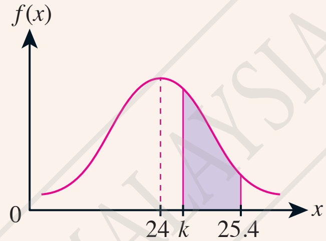
$= P(Z > 1.281)$

$= 0.1$

Latihan Kendiri 5.13

1. Diberi X ialah pemboleh ubah rawak selanjar yang bertaburan normal dengan min 210 dan sisihan piawai 12. Cari
(a) skor-z jika $X = 216$,
(b) X jika skor-z ialah -1.8.

2. Diameter bola keranjang yang dihasilkan oleh sebuah kilang bertaburan normal dengan min 24 cm dan sisihan piawai 0.5 cm. Rajah di sebelah menunjukkan graf taburan normal bagi diameter, dalam cm, bola keranjang itu. Diberi bahawa luas rantau berlorek ialah 0.245, cari nilai k.



3. Ketinggian murid Tingkatan 1 di sebuah sekolah bertaburan normal dengan min 145 cm dan sisihan piawai 10 cm.
(a) Jika seorang murid dipilih secara rawak daripada kumpulan murid itu, cari kebarangkalian bahawa ketinggian murid itu adalah sekurang-kurangnya 140 cm.
(b) Jika bilangan murid Tingkatan 1 ialah 450 orang, cari bilangan murid dengan ketinggian yang tidak lebih daripada 150 cm.

4. Dalam sebuah sekolah, 200 orang murid menduduki satu ujian Matematik. Markah yang diperoleh bertaburan normal dengan min 50 markah dan sisihan piawai 10 markah.
(a) Dalam ujian itu, murid yang memperoleh 70 markah dan ke atas dikategorikan sebagai cemerlang. Cari bilangan murid dalam kategori tersebut.
(b) Diberi bahawa 60% daripada murid lulus dalam ujian tersebut, anggarkan markah minimum untuk lulus.

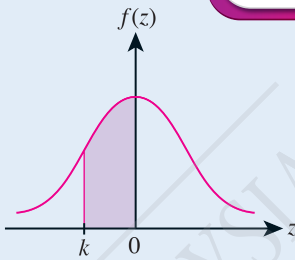
5. Markah dalam suatu ujian Bahasa Inggeris di sebuah sekolah bertaburan normal dengan min μ dan varians σ^2. 10% daripada murid di sekolah itu mendapat lebih daripada 75 markah dan 25% daripada murid itu mendapat kurang daripada 40 markah. Cari nilai μ dan σ.

6. Jisim buah betik yang dihasilkan di sebuah kebun mempunyai taburan normal dengan min 840 g dan sisihan piawai 24 g. Buah betik yang berjisim antara 812 g dengan 882 g akan dieksport ke luar negara manakala buah betik yang berjisim 812 g atau kurang daripadanya akan dijual di pasar tempatan. Cari
(a) kebarangkalian bahawa sebiji betik yang dipilih secara rawak akan dieksport ke luar negara,
(b) bilangan buah betik yang tidak dieksport ke luar negara dan tidak dijual di pasar tempatan jika kebun itu menghasilkan 2 500 biji betik.

Latihan Formatif 5.3

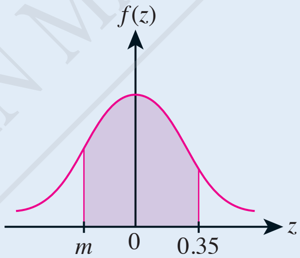
Kuiz bit.ly/34OZmLm

1. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi taburan normal piawai. Kebarangkalian yang diwakili oleh rantau berlorek ialah 0.3415. Cari nilai k.



2. X ialah suatu pemboleh ubah rawak selanjar yang bertaburan normal dengan min 12 dan varians 4. Cari
   (a) skor-z jika $X = 14.2$,
   (b) $P(11 < X < 13.5)$.

3. Rajah di sebelah menunjukkan graf bagi taburan normal piawai. Jika $P(m < Z < 0.35) = 0.5124$, cari $P(Z < m)$.



4. Jisim bayi yang dilahirkan di sebuah hospital bertaburan normal dengan min 3.1 kg dan sisihan piawai 0.3 kg.
   (a) Cari kebarangkalian bahawa seorang bayi yang lahir di hospital itu mempunyai jisim antara 2.9 kg dengan 3.3 kg.
   (b) Jika 25% daripada bayi yang dilahirkan di hospital tersebut dikategorikan sebagai kurang berat, cari jisim maksimum bagi kategori ini.

5. Gambar di sebelah menunjukkan ternakan ikan yang diusahakan oleh Encik Lim. Jisim ikan dalam kolam itu bertaburan normal dengan min 650 g dan sisihan piawai p g.
   (a) Jika kebarangkalian bahawa seekor ikan yang ditangkap secara rawak mempunyai jisim kurang daripada 600 g ialah 0.0012, cari nilai p.
   (b) Jika 350 ekor ikan mempunyai jisim antara 645 g dengan 660 g, cari bilangan ikan yang terdapat dalam kolam itu.

6. Gaji harian pekerja di sebuah kilang bertaburan secara normal dengan min RM80 dan sisihan piawai RM15.
   (a) Diberi bahawa bilangan pekerja di kilang itu ialah 200 orang, cari bilangan pekerja yang memperoleh gaji harian lebih daripada RM85.
   (b) Cari nilai p jika p% daripada pekerja di kilang itu mendapat gaji harian kurang daripada RM85.

SUDUT REFLEKSI

TABURAN KEBARANGKALIAN

Pemboleh ubah rawak diskret

$\sum_{i=1}^{n} P(X = r_i) = 1$

Taburan kebarangkalian boleh ditafsirkan melalui gambar rajah pokok, jadual dan graf.

Taburan binomial, $X \sim B(n, p)$

- Melibatkan n percubaan Bernoulli yang serupa.
- $P(X = r) = {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$
  dengan keadaan
  n = bilangan percubaan
  r = bilangan 'kejayaan'
  $= 0, 1, 2, \ldots, n$
  p = kebarangkalian 'kejayaan'
  q = kebarangkalian 'kegagalan'
  $= 1 - p$

Min, varians dan sisihan piawai

- Min, $\mu = np$
- Varians, $\sigma^2 = npq$
- Sisihan piawai, $\sigma = \sqrt{npq}$

Aplikasi

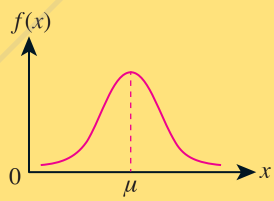
$n > 30$

Pemboleh ubah rawak selanjar

$P(-\infty < X < \infty) = 1$

Taburan kebarangkalian boleh ditafsirkan melalui graf selanjar.

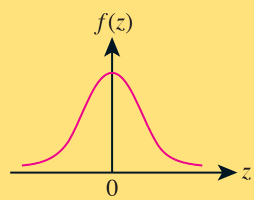
Taburan normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



- Berbentuk loceng
- Bersimetri pada paksi $X = \mu$.
- Luas di bawah graf bagi $-\infty < X < \infty$ mewakili kebarangkalian diberi oleh $P(-\infty < X < \infty) = 1$

Taburan normal piawai, $Z \sim N(0, 1)$

Pemboleh ubah piawai selanjar, $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.



Penulisan Jurnal

Bina satu info grafik berkaitan ciri-ciri, jenis taburan kebarangkalian dan perkaitan antara pemboleh ubah rawak diskret dan pemboleh ubah rawak selanjar. Seterusnya, cari maklumat di Internet mengenai kepentingan taburan normal dalam kehidupan seharian.

Latihan Sumatif

1. Dua biji dadu adil dilambungkan secara serentak. Nombor A dan nombor B pada permukaan atas kedua-dua biji dadu dicatatkan. Katakan pemboleh ubah skor X bagi lambungan itu ditakrifkan sebagai $X = \{A + B: A = B\}$, senaraikan semua nilai yang mungkin bagi X. TP 1

2. Jadual di bawah menunjukkan taburan kebarangkalian bagi pemboleh ubah rawak diskret X. TP 2

$X = r$	1	2	3	4
$P(X = r)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	q

(a) Cari nilai q.
(b) Cari $P(X > 2)$.

3. Sebuah sekolah melaksanakan sistem merit dan demerit. Dalam sistem tersebut, murid akan diberikan 2 markah jika berkelakuan baik dan –1 markah jika berkelakuan kurang baik bagi setiap minggu. Katakan '+' mewakili kelakuan baik dan '–' mewakili kelakuan kurang baik. TP 3
(a) Bina satu gambar rajah pokok bagi menunjukkan semua kelakuan yang mungkin bagi seorang murid yang dipilih secara rawak dari sekolah itu untuk tempoh 3 minggu.
(b) Jika X mewakili markah yang diperoleh seorang murid dalam tempoh 3 minggu itu, senaraikan semua kesudahan yang mungkin bagi X dalam tatatanda set.

4. Dalam suatu permainan, seorang pemain dikehendaki memasukkan sebiji bola tenis ke dalam sebuah bakul dari suatu jarak tertentu. Setiap pemain diberikan 3 kali percubaan. Kebarangkalian bahawa seorang pemain dapat memasukkan bola tenis ke dalam bakul itu ialah 0.45. TP 3
(a) Jika X mewakili bilangan kali bola tenis masuk ke dalam bakul, tunjukkan bahawa X ialah pemboleh ubah rawak diskret.
(b) Senaraikan semua kesudahan yang mungkin dalam satu jadual dan seterusnya lukis satu graf untuk mewakili kebarangkaliannya.

5. Jika $X \sim B(6, 0.4)$, cari TP 2
(a) $P(X = 2)$
(b) $P(X > 4)$
(c) $P(X \leqslant 2)$

BAB 5

6. Kebarangkalian bahawa seorang suri rumah membeli detergen jenama W ialah 0.6. Satu sampel yang terdiri daripada 8 orang suri rumah dipilih secara rawak. Cari kebarangkalian bahawa TP 3
   (a) tepat 3 orang suri rumah membeli detergen jenama W,
   (b) lebih daripada 4 orang suri rumah membeli detergen jenama W.

7. Dalam suatu kajian, didapati bahawa 18 daripada 30 orang mahasiswa mempunyai hobi membaca buku. Jika 9 orang mahasiswa dipilih secara rawak, hitung kebarangkalian bahawa TP 3
   (a) tepat 4 orang mahasiswa mempunyai hobi membaca buku,
   (b) sekurang-kurangnya 7 orang mahasiswa mempunyai hobi membaca buku.

8. Seorang petani memetik buah manggis secara rawak dari sebuah dusun. Kebarangkalian bahawa sebiji manggis yang dipetik mengandungi ulat ialah $\frac{1}{5}$. Cari min dan sisihan piawai bilangan manggis yang berulat dalam satu sampel 35 biji manggis. TP 2

9. Dalam suatu kumpulan guru, min bilangan guru yang memiliki kereta buatan Malaysia ialah 7 dan varians ialah 2.8. Cari kebarangkalian bahawa TP 3
   (a) seorang guru yang dipilih secara rawak memiliki kereta buatan Malaysia,
   (b) 2 orang guru yang dipilih secara rawak memiliki kereta buatan Malaysia.

10. Diberi $X \sim N(48, 144)$. Cari nilai k jika TP 3
   (a) $P(X > 47) = k$
   (b) $P(38 < X < 46) = k$
   (c) $P(X \leqslant 49.5) = k$
   (d) $P(47 < X < 50) = k$
   (e) $P(X > k) = 0.615$
   (f) $P(45 < X < k) = 0.428$
   (g) $P(X > |k|) = 0.435$
   (h) $P(-k < X < 48) = 0.2578$

11. Diketahui bahawa hasil bahagi darjah kecerdasan otak (IQ) bagi 500 orang calon yang memohon untuk memasuki sebuah maktab perguruan bertaburan normal dengan min 115 dan sisihan piawai 10. TP 4
   (a) Jika maktab perguruan itu memerlukan IQ tidak kurang daripada 96, anggarkan bilangan calon yang tidak akan berjaya memasuki maktab perguruan itu.
   (b) Jika 300 orang calon berjaya memasuki maktab perguruan itu, cari nilai IQ minimum yang diperlukan.

12. Satu pemeriksaan jisim badan dijalankan ke atas pekerja di sebuah kilang. Jisim badan pekerja di kilang itu bertaburan normal dengan min 65 kg dan varians 56.25 kg^2. Bilangan pekerja yang mempunyai jisim badan antara 56 kg dengan 72 kg ialah 250 orang. TP 5
   (a) Cari jumlah pekerja di kilang itu.
   (b) Jika 5% daripada pekerja adalah obes, cari jisim badan minimum bagi kategori ini.

13. Sebuah dusun menghasilkan buah oren. Jadual di bawah menunjukkan penggredan buah oren mengikut jisimnya yang akan dipasarkan. TP 5

Gred	A	B	C
Jisim, X (g)	$X > 300$	$200 < X \leqslant 300$	$m < X \leqslant 200$

Diberi bahawa jisim buah oren yang dihasilkan di dusun itu bertaburan normal dengan min 260 g dan sisihan piawai 35 g.

(a) Jika sebiji oren dipilih secara rawak, cari kebarangkalian oren itu ialah gred A.

(b) Sebuah bakul mempunyai 600 biji oren, anggarkan bilangan oren gred B.

(c) Jika 99% daripada oren itu boleh digredkan dan dijual, cari jisim minimum yang boleh digredkan dan dijual.

EKSPLORASI MATEMATIK

Bagaimanakah anda boleh mengetahui bilangan gula-gula dalam sebuah botol tanpa perlu mengiranya satu demi satu? Mari jalankan aktiviti yang berikut secara berkumpulan.

1. Sediakan sebotol gula-gula pelbagai warna tanpa gula-gula berwarna biru dan 30 biji gula-gula berwarna biru.

2. Ikuti langkah-langkah yang berikut.

- Keluarkan 30 biji gula-gula secara rawak dari botol itu dan gantikannya dengan 30 biji gula-gula berwarna biru.
- Goncangkan botol itu supaya gula-gula berwarna biru bercampur secara seragam di dalam botol.
- Keluarkan satu senduk gula-gula dari botol itu sebagai satu sampel rawak.
- Hitung jumlah gula-gula yang dikeluarkan dari botol, n dan juga bilangan gula-gula berwarna biru yang dikeluarkan, m. Seterusnya, cari nisbah $\frac{m}{n}$.
- Masukkan semula gula-gula yang dikeluarkan ke dalam botol itu dan goncangkannya.

3. Ulang langkah di atas untuk sampel rawak kedua hingga ke-10 supaya variasi rawak bagi nilai $\frac{m}{n}$ semakin kecil.

4. Kemudian, anggarkan bilangan gula-gula dalam botol itu menggunakan kaedah seperti dalam Aktiviti Penerokaan 6.

5. Semak jawapan yang anda peroleh dengan membahagikan gula-gula itu kepada beberapa bahagian dan minta rakan daripada kumpulan yang lain untuk mengiranya.

6. Dengan menggunakan konsep yang diperoleh daripada aktiviti di atas, bantu setiap syarikat berikut untuk menyelesaikan masalah yang dihadapinya.

(a) Bagaimanakah sebuah syarikat pengeluar kereta dapat mengetahui warna kereta yang diminati oleh rakyat Malaysia?

(b) Bagaimanakah sebuah syarikat pengimport telefon pintar dapat mengetahui jenama telefon pintar yang disukai oleh majoriti pengguna?

BAB 5